К. У. Шахно

Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике

К. У. Шахно

Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике

Издание девятое,
стереотипное

Издательство «Вышэйшая школа»
Минск 1973

Оглавление

Глава I. Определения, аксиомы и теоремы

§ 1. Математические предложения . . . . . .
§ 2 Определение и теорема . . . . . .
§ 3 Прямая и обратиая теоремы . . . . . .
§ 4 Необходимые и достаточные условия . . . . . .
Упражнения . . . . . .

Глава II. Числа, изучаемые в элемеитарной математике

§ 1 Числа, рассматриваемые в арифметике . . . . . .
§ 2 Рациональные числа . . . . . .
§ 3 Вещественные (действительные) числа . . . . . .
§ 4 Комплексиые числа . . . . . .
Упражнения . . . . . .

Глава III. Тождественные преобразования математнческих выражений

§ 1 Тождество и тождественное преобразование . . . . . .
§ 2. Преобразоваиие алгебраических выражений . . . . . .
§ 3. Преобразование показательных и логарифмических выражений
§ 4 Преобразование тригонометрических выражений . .
Упражнения . . . . . .

Глава IV. Решеиие уравнений

§ 1 Общие сведения об уравиениях . . . . . .
§ 2. Решение алгебраических уравиений . . . . . .
§ 3 Решение показательных и логарифмических уравнений
§ 4. Решеиие тригонометрических уравнений . . . . . .
Упражнения . . . . . .

Глава V. Решеиие и доказательство неравенств

§ 1 Алгебраические неравенства . . . . . .
§ 2. Простейшие трансцендеитные неравенства . . . . . .
Упражиения . . . . . .

Глава VI. Фуикции и их графики

§ 1. Схема исследования функции и построеиия ее графика
§ 2. Преобразование графиков . . . . . .
Упражнения . . . . . .

Глава VII. Геометрнческие задачи

§ 1. Геометрические задачи иа плоскости . . . . . .
§ 2. Геометрические задачи в пространстве . . . . . .
Упражнсиия . . . . . .

Глава VIII. Разные вопросы

§ 1. Арифметическая и геометрическая прогрессии 250
§ 2. Соединения и бином Ньютона 256
§ 3. Метод математической индукции 261

Упражнения 271

Приложение. Задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы в 1961—1967 гг 273

Ответы, указания и решения к упражнениям 306
Ответы, указания и решения к приложению 330

Глава I

Определения, аксиомы и теоремы

§ 1. Математические предложения

1. Рассматриваемые в математике истины формулируются в виде предложений. Главнейшие из них следующие: определения, теоремы и аксиомы.

Определением называется предложение, в котором разъясняется смысл нового понятия. Теорема есть предложение, справедливость которого устанавливается путем некоторого рассуждения, называемого доказательством. Аксиомой называется истина, принимаемая без доказательства. Непосредственный вывод из аксиомы или теоремы называется следствием. Подготовительное предложение, вводимое для доказательства последующего, называется леммой. Следствие и лемма — теоремы.

Пример 1. Следующие предложения являются определениями, принятыми в элементарной математике: а) всякое целое число, кроме единицы, которое делится только на единицу и само на себя, называется простым; б) произведение n сомножителей, равных одному и тому же числу a, называется n-й степенью числа a; в) прямая, проходящая через любые две точки окружности, называется секущей этой окружности; г) радианной мерой угла называется отношение длины дуги окружности, для которой данный угол является центральным, к длине радиуса этой дуги.

Пример 2. Следующие предложения являются аксиомами: а) две величины, равные третьей, равны между собой; б) через любые две точки можно провести прямую и притом только одну.

Пример 3. Следующие предложения являются теоремами. а) всякое составное число можно представить в виде произведения простых чисел; б) логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов этих сомножителей; в) всякий выпуклый многоугольник можно преобразовать в равновеликий квадрат; г) косинус является четной функцией.

2. В каждой теореме есть условие и заключение. Например, в теореме «если произведение комплексных чисел равно нулю, то хотя бы один из сомножителей равен нулю» первая часть

(«если произведение комплексных чисел равно нулю») является условием, которое предполагается данным, а вторая («то хотя бы один из сомножителей равен нулю») — заключением, т. е. тем, что подлежит доказательству. Приведенная теорема выражена в так называемой условной форме. Часто теорема выражается в категорической форме. Например: «синус является нечетной функцией» Однако в какой бы форме ни высказывалась теорема, в ней есть условие и заключение Условие и заключение теоремы образуют состав теоремы.

Доказательство теоремы состоит в том, что путем построения ряда умозаключений переходят от условия теоремы к ее заключению. При этом опираются на ранее доказанные теоремы, на сформулированные ранее определения и аксиомы. Таким образом, в основе лежит небольшое число аксиом. Аксиомы возникли из опыта, и справедливость их в совокупности, равно как и теорем, доказанных с их помощью, проверяется многократными наблюдениями и длительным опытом.

§ 2. Определение и теорема

3. В математике есть такие понятия, которые принимаются за первоначальные (их называют также начальными, основными), например понятие точки в геометрии или единицы в арифметике Определения же опираются либо на первоначальные понятия, либо на данные ранее определения. Так, определение «два комплексных числа $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ называются равными, если равны их вещественные ($a = a_1$) и мнимые ($b = b_1$) части» предполагает, что известны понятия вещественного числа, равенства вещественных чисел, комплексного числа, вещественной части и мнимой части комплексного числа. Но здесь нет доказательства. *Определения не доказывают.*

4. Попытки доказывать определения встречаются нередко. Такое смешение определения с теоремой обычно является результатом непонимания существа дела. Рассмотрим старый вопрос о «доказательстве» равенства $a^0 = 1$. «Доказательство» основано на использовании формулы $a^m : a^n = a^{m-n}$ при $m = n$, равенства $\frac{a^m}{a^m} = 1$ и аксиомы, что две величины, равные третьей, равны между собой. Действительно, получается, что $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$ и $\frac{a^m}{a^m} = 1$, а отсюда $a^0 = 1$.

Неверность здесь состоит прежде всего в том, что раз символ a^0 встречается впервые (речь идет об обычном расположении материала в учебнике), то нужно сказать, что следует под ним понимать, т. е. определить его, и только после этого имеет смысл что-либо доказывать относительно этого символа и опери-

ровать им. Неверна и ссылка на формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$, которая была получена в предположении, что $m > n$ (и, следовательно, $m \neq n$). Но определить a^0 можно по-разному. Например, можно было бы условиться всегда считать a^0 числом 5. Тогда равенство $a^0 = 5$ было бы определением a^0. Но так не поступают, потому что это нерационально. В самом деле, в этом случае была бы неверна формула $a^m \ a^n = a^{m-n}$ при $m = n$. Если же положить $a^0 = 1$, то этого неудобства не будет. Таким образом, желание раздвинуть границы применимости формулы $a^m : a^n = a^{m-n}$ побуждает нас определить нулевую степень числа так: $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$.

Примерно такое же «доказательство» встречается и для определения отрицательной степени числа, т. е. для равенства $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Другой любопытный пример смешения определения и теоремы связан с равенством $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ (n — натуральное и больше 1). Известно, что корнем степени n из числа a называется число x, n-я степень которого равна a:

$$x^n = a.$$

Это есть определение корня. Если же учесть, что корень обозначается символом $\sqrt[n]{a}$, то последнее равенство запишется так:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Таким образом, рассматриваемое равенство *не нуждается в доказательстве* и достаточно указать, что оно записывается так по определению. Такие же «доказательства» его, как $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$, неуместны.

То же самое можно сказать и о равенстве $a^{\log_a x} = x$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$), которое представляет собой всего лишь символическую запись определения логарифма, того определения, которое хорошо знакомо каждому десятикласснику.

5. В книгах по элементарной математике, предназначенных для школьников, определения математических понятий в основном одинаковые. Но тот, кто определяет, имеет относительную свободу в выборе определения. Например, А. Н. Барсуков («Алгебра». Ч. I. М., 1956) называет многочленом алгебраическую сумму нескольких одночленов. Это есть определение многочлена. Под одиночленом же он понимает алгебраическое выражение, содержащее только действия умножения и возведения в степень чисел, обозначенных буквами и цифрами. При этом показатель степени предполагается натуральным. С. И. Новоселов в своих книгах по элементарной математике, не предназначенных для школьников, называет многочленом рациональное

выражение, не содержащее деления на буквенные выражения. Поставим теперь вопрос: какие из алгебраических выражений

$$2x^3 - 3x - xy,\ (x+y)^2,\ x(y+z)+1$$

являются многочленами? С точки зрения С. И. Новоселова, все три алгебраических выражения — многочлены. По мнению А. Н. Барсукова, лишь первое выражение есть многочлен, а второе и третье — целые алгебраические выражения, но ни многочлены, ни одночлены.

Будет ли геометрическая прогрессия 2, —4, 8, —16,... возрастающей? Если пользоваться определением, данным А. П. Киселевым («Алгебра». Ч. II. М., 1939), то будет. Там возрастающей прогрессией названа такая, у которой увеличивается абсолютная величина членов по мере удаления от начала (от первого члена) прогрессии. А вот по определению Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского («Алгебра». Ч. II. Л., 1954), эта прогрессия ни возрастающая, ни убывающая. Эти авторы называют такую прогрессию возрастающей (убывающей), у которой каждый последующий член не меньше (не больше) предыдущего.

Эти небольшие различия, зависящие от точки зрения авторов, которую они выбрали совершенно сознательно и которую они могут убедительно аргументировать, не мешают правильному пониманию соответствующих вопросов математики, какой бы из указанных книг ни пользоваться. Но, как показано выше, ответ на какой-либо вопрос существенно зависит от тех определений, которые имеют отношение к этому вопросу.

6. Как много иногда зависит от определения, хорошо иллюстрирует следующий пример. А. П. Киселев («Геометрия». Ч. II. М., 1939) призму определяет следующим образом: «Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы». Можно ли так определить призму? Можно, ведь это право автора. Но, безусловно, нецелесообразно! Ведь при таком определении нужно отнести к призмам и многогранник, изображенный на рис. 1. Он называется *ромбическим додекаэдром*, и все его грани — равные ромбы. Однако на практике мы не привыкли такой многогранник называть призмой, и А. П. Киселев, по-видимому, не заметил, что своим определением создает некоторые неудобства. Исправить это определение в нужном направлении очень просто. Достаточно в нем после слова «параллелограммы» добавить слова «плоскости которых параллельны одной и той же прямой».

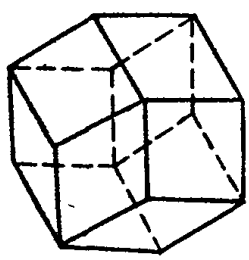

Рис. 1

У того же автора в учебнике по геометрии («Геометрия». Ч. I. М., 1939) приведены такие определения: а) бесконечная

прямая, проходящая через какие-нибудь две точки окружности, называется секущей; б) две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали. А вот в учебнике по геометрии Н. Н. Никитина сказано, что «прямая линия бесконечна». Выходит, что в определении секущей слово «бесконечная» ненужное, а продолжать прямые, как это предполагает определение параллельных прямых, невозможно. Теперь принято в учебниках давать такое определение: «Две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки, называются параллельными». А. П. Киселев, учитывая возрастные особенности школьников, в самом начале своего учебника вводит термин «бесконечная прямая», или «неограниченная прямая». Из дальнейших разъяснений Киселева по этому поводу видно, что с его позиции такие определения принять можно. Но с той позиции, какая сейчас принята в школе при введении первоначального понятия прямой, эти определения нельзя признать удовлетворительными.

7. Каждое определение имеет свои границы применимости, и без учета их можно допустить ошибку. Разберемся в этом на примерах. Известно, что произведение n сомножителей, равных одному и тому же числу a, называется n-й степенью числа a, т. е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ раз}}$$

Конечно, никто не будет утверждать, что в этой формулировке содержатся определения a^{-2}, $a^{\frac{1}{2}}$, a^0. На самом деле, ведь не возьмешь число a сомножителем -2, $\frac{1}{2}$, 0 раз. А как обстоит дело с первой степенью числа a, т. е. с a^1? Ведь показатель степени здесь натуральный! Такой вопрос многих смущает. Но ведь слово «сомножитель» говорит о том, что он не один, а должен быть хотя бы еще один (той же величины). Значит, в определении нужно считать $n > 1$, и a^1 это определение не содержит. И если мы пишем $a^1 = a$, то смотрим на это равенство как на *определение первой степени* числа, которое вместе с предыдущим дает определение любой натуральной степени.

С аналогичным случаем встречаемся при определении символа $n!$ (n факторнал). Под символом $n!$, где n — натуральное число, понимается произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n, т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Для произведения должно быть не меньше двух сомножителей, и, следовательно, это определение предполагает $n > 1$. Но в ряде вопросов, например при изучении последовательностей, пользуются символами 1! и 0!. Некоторые учащиеся думают, что определение 1! содержится в предыдущем, на самом деле оно не охватывает ни 1!, ни 0!.

Для них пишут $1! = 1$ и $0! = 1$, но это имеет место *по определению.*

8. Определение не доказывается, но при изложении предмета можно поступать по-разному. То, что было при одном способе определением какого-то понятия, при другом может стать теоремой, которую придется доказывать. Для иллюстрации сказанного рассмотрим определения сложения и вычитания комплексных чисел. Сложение комплексных чисел $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ определяется с помощью равенства $(a+bi) + (a_1+b_1 i) = (a+a_1) + (b + b_1) i$. Данные числа называются слагаемыми, а полученное число — суммой.

Вычитание чисел $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ обычно определяется как действие, обратное сложению, посредством которого по данной сумме $a + bi$ и данному слагаемому $a_1 + b_1 i$ отыскивается другое слагаемое; оно называется разностью. Из этих двух определений следует (это нужно доказать!), что существует, и притом единственное, комплексное число, являющееся разностью данных чисел, а именно число $(a - a_1) + (b - b_1) i$. Но можно было бы, оставив прежнее определение сложения, определить вычитание с помощью равенства $(a + bi) - (a_1 + b_1 i) = (a - a_1) + (b - b_1) i$. Тогда прежнее определение вычитания как действия, обратного сложению, стало бы теоремой.

§ 3. Прямая и обратная теоремы

9. Теорема называется обратной данной теореме, если ее условие и заключение являются соответственно заключением и условием (или частью их) данной теоремы. Так, для теоремы «в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы» обратной будет «в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны». С другой стороны, для второй из этих теорем первая будет обратной.

Обе эти теоремы верны. Но не всегда бывает так. Рассмотрим, например, теорему «в прямоугольнике диагонали равны». Для нее обратной будет такая теорема: «если в четырехугольнике диагонали равны, то он — прямоугольник». Эта теорема неверна. *Для доказательства ее неверности достаточно привести один пример* четырехугольника с равными диагоналями, который не является прямоугольником. Таким примером может служить равнобедреиная трапеция. Но для той же теоремы «в прямоугольнике диагонали равны» обратной служит и такая: «если в параллелограмме диагонали равны, то он — прямоугольник», которая, как легко доказать, верна.

Как же получилось, что у одной теоремы оказались две обратные? В формулировке прямой теоремы упоминался прямоугольник, а он является не только четырехугольником, но и параллелограммом. В одной из обратных теорем (в первой) была

использована лишь часть условия (четырехугольник), а в другой — все условие. Но в том и другом случае теорема называется обратной.

Из всего этого вытекает, что *из справедливости прямой теоремы еще не следует справедливость обратной теоремы.*

10. Теорема называется противоположной данной теореме, если ее условие и заключение являются отрицанием условия и заключения данной теоремы. Так, теореме «если целое число делится на два, то квадрат этого числа делится на четыре» соответствует противоположная теорема «если целое число не делится на два, то квадрат этого числа не делится на четыре». Возьмем теорему, будем называть ее прямой и, составив обратную и противоположную ей, а также противоположную обратной, получим следующие четыре теоремы

1) если две стороны треугольника равны, то и углы, лежащие против этих сторон, равны;

2) если два угла треугольника равны, то и стороны, лежащие против этих углов, равны,

3) если две стороны треугольника не равны, то и углы, лежащие против этих сторон, не равны,

4) если два угла треугольника не равны, то и стороны, лежащие против этих углов, не равны.

Убедимся, что первая теорема (прямая) и четвертая (противоположная обратной) равносильны, т. е. если справедлива первая, то справедлива и четвертая, а если справедлива четвертая, то справедлива и первая. Точно так же вторая и третья равносильны.

Проведем доказательство так, чтобы оно годилось не только для этих конкретных четырех теорем, а для любых теорем указанного вида. Будем обозначать условие прямой теоремы буквой A, а заключение — буквой B. Тогда теоремы сформулируются так

1) прямая: если есть A, то есть и B;

2) обратная если есть B, то есть и A;

3) противоположная. если нет A, то нет и B;

4) противоположная обратной: если нет B, то нет и A.

Пусть справедливо первое предложение, т. е. «если есть A, то есть и B». Тогда справедливо и последнее — «если нет B, то нет и A», так как если бы было A, то по первой теореме было бы и B. Обратно, из справедливости последнего предложения «если нет B, то нет и A» следует справедливость первого — «если есть A, то есть и B», потому что если бы не было B, то по четвертой теореме не было бы и A.

Аналогично доказывается равносильность второй и третьей теорем.

Из сказанного следует, что нет надобности доказывать все четыре теоремы, для того чтобы убедиться в их справедливости. Достаточно доказать, например, прямую и обратную или прямую и противоположную теоремы.

Известный метод доказательства *от противного* есть не что иное, как сведение доказательства прямой теоремы к доказательству теоремы, противоположной обратной. Можно доказать, что если прямая теорема верна, то, пользуясь методом доказательства от противного, мы придем к противоречию, а если теорема неверна, то противоречия не получим. Конечно, при этом предполагается, что при доказательстве используются лишь верные математические предложения и что наши умозаключения правильные.

11. Лишь немногие из поступающих в высшие учебные заведения, отвечая на экзамене, утверждают, что обратная теорема верна, если верна прямая теорема. Но зато очень часто учащиеся не могут разобраться, на какую теорему нужно сослаться — прямую или обратную, и на поставленный вопрос отвечают невпопад. Вот один из таких вопросов: если из точки C проведены к окружности секущая, имеющая с окружностью точки пересечения A и B, и отрезок CD, где D — точка той же окружности, и если $CA \cdot CB = CD^2$, то будет ли прямая CD касательной к окружности? Обычно ответ такой: «Будет, на основании теоремы о касательной и секущей, проведенных из одной и той же точки к некоторой окружности». То, что CD — касательная к окружности, верно, а вот ссылаться на указанную теорему неверно, ведь она формулируется так: если из точки C, взятой вне окружности, проведены к ней секущая, имеющая с этой окружностью точки пересечения A и B, и касательная CD, где D — точка касания, то произведение $CA \cdot CB$, всей секущей CA на ее внешнюю часть CB, равно квадрату CD^2 касательной CD. Отсюда видно, что ссылаться нужно не на эту теорему, а на теорему, ей *обратную*. Доказательство обратной теоремы в учебниках отсутствует, но оно по силам окончившему среднюю школу и не труднее доказательств тех теорем, какие дают учащимся для самостоятельных упражнений (см. упр. 18 в конце главы).

Упомянутая обратная теорема сравнительно редко используется при решении задач. Но есть в геометрии теоремы, имеющие большую практическую ценность, также являющиеся обратными для некоторых теорем, доказательство которых дается в учебниках, однако эти обратные теоремы в учебниках обычно лишь сформулированы. Мы приведем пример подобной теоремы и укажем такой способ ее доказательства, который будет иметь общий характер. Начнем опять с вопроса: если длины сторон треугольника 7, 6 и 5 *м*, то какой это треугольник — прямоугольный, остроугольный, тупоугольный? При этом возможность треугольника с такими сторонами считается установленной. На этот вопрос слишком часто приходится слышать такой ответ: «Так как $7^2 < 6^2 + 5^2$, то треугольник остроугольный на основании теоремы о квадрате стороны треугольника, лежащей про-

тив острого угла». Этот треугольник действительно остроугольный, но следует это из теоремы, *обратной* теореме о квадрате стороны треугольника, лежащей против острого угла. При этом нельзя ограничиться приведением только одного неравенства $7^2 < 6^2 + 5^2$, а надо еще сослаться на теорему о том, что в треугольнике против бо́льшей стороны лежит бо́льший угол, так как из неравенства $7^2 < 6^2 + 5^2$ следует лишь, что против стороны длиной 7 *м* лежит острый угол, а не то, что он наибольший.

Обратная теорема, на которую здесь приходится ссылаться, формулируется так: если квадрат стороны треугольника меньше суммы квадратов двух других его сторон, то угол, лежащий против этой стороны, острый. Докажем ее. Рассуждаем так: если бы угол треугольника, лежащий против рассматриваемой стороны, не был острым, то он мог бы быть только прямым или тупым. Но когда угол треугольника прямой, то квадрат противолежащей ему стороны равен сумме квадратов двух других сторон треугольника (теорема Пифагора), а когда угол тупой, то квадрат противолежащей углу стороны больше суммы квадратов двух других сторон (теорема о квадрате стороны треугольника, лежащей против тупого угла). Следовательно, угол, о котором идет речь, не может быть ни прямым, ни тупым. Но тогда он должен быть острым.

12. Приведенное в п. 11 доказательство теоремы является примером применения так называемого *закона обратимости*. Знание его освобождает от доказательства некоторых теорем, если выполнены определенные условия, при которых этот закон действует. Разъясним закон обратимости на примере теоремы о квадрате стороны треугольника, которая только что рассматривалась. Обозначим длины сторон треугольника буквами a, b и c. Сторона a может лежать против острого угла, или против прямого, или против тупого. Никаких иных углов в треугольнике не бывает, и, следовательно, никакого иного угла против стороны a быть не может. С другой стороны, если против стороны a лежит острый угол, то против нее не может лежать одновременно прямой или тупой. Иначе это можно высказать так: против стороны a лежит один и только один угол указанных видов (острый, прямой, тупой). Точно так же квадрат стороны a треугольника связан с суммой квадратов двух других сторон b и c треугольника одним и только одним из следующих соотношений: $a^2 < b^2 + c^2$, $a^2 = b^2 + c^2$, $a^2 > b^2 + c^2$.

Для рассматриваемого математического объекта — треугольника со сторонами a, b и c — в школьном учебнике доказаны теоремы:

1) если сторона a лежит против острого угла, то $a^2 < b^2 + c^2$;

2) если сторона a лежит против прямого угла, то $a^2 = b^2 + c^2$;

3) если сторона a лежит против тупого угла, то $a^2 > b^2 + c^2$.

Закон обратимости утверждает, что из справедливости этих трех теорем следует справедливость других трех теорем, обратных первым.

Рассмотрим вопрос в общем виде. Пусть некоторый математический объект может обладать одним и только одним из трех свойств A_1, A_2, A_3 и одним и только одним из трех свойств B_1, B_2, B_3. Предположим, что при этих условиях справедливы следующие теоремы:

1) если есть A_1, то есть и B_1,
2) если есть A_2, то есть и B_2,
3) если есть A_3, то есть и B_3.

Тогда справедливы и обратные им теоремы:

4) если есть B_1, то есть и A_1,
5) если есть B_2, то есть и A_2,
6) если есть B_3, то есть и A_3.

В этом и состоит закон обратимости.

Докажем, например, теорему 6. Пусть есть B_3. Тогда может быть или A_1, или A_2, или A_3. Но если есть A_1, то есть и B_1 (теорема 1) и не может быть B_3. Если есть A_2, то есть и B_2 (теорема 2) и не может быть B_3. Следовательно, не может быть ни A_1, ни A_2, и поэтому должно быть A_3.

Пример 4. Пусть числа a и b неотрицательные, а n — число натуральное. Любые два вещественных числа могут быть связаны одним и только одним соотношением: $a = b$, $a > b$, $a < b$. Кроме того, известно, что для неотрицательных чисел a и b справедливы теоремы.

1) если $a = b$, то $a^n = b^n$;
2) если $a > b$, то $a^n > b^n$;
3) если $a < b$, то $a^n < b^n$.

Тогда в силу закона обратимости справедливы обратные этим теоремы:

4) если $a^n = b^n$, то $a = b$;
5) если $a^n > b^n$, то $a > b$;
6) если $a^n < b^n$, то $a < b$.

Замечание. Здесь существенно, что a и b — неотрицательные числа Например, $2 > -3$, но $2^2 < (-3)^2$.

Пример 5. Доказать формулу $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. Все корни, входящие в равенство, арифметические.

Решение. Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа A называется неотрицательное значение корня степени n из этого числа. Такое значение корня для любого $A \geqslant 0$ и натурального $n > 1$ *существует и притом единственное.* Поэтому величины a, b, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{ab}$ неотрица-

тельные. Обозначим $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=x$, $\sqrt[n]{ab}=y$. Получим $x^n=(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$, $y^n=(\sqrt[n]{ab})^n=ab$. Но если $x^n=y^n$, то $x=y$ (см. пример 4).

Пример 6. Доказать: если $x>y$ и натуральное число $n>1$, то $\sqrt[n]{x}>\sqrt[n]{y}$ ($\sqrt[n]{x}$ и $\sqrt[n]{y}$ арифметические).

Решение. Подлежащее доказательству неравенство есть всего лишь другая запись предпоследней теоремы примера 4. Для полного совпадения достаточно положить: $\sqrt[n]{x}=a$, $\sqrt[n]{y}=b$.

13. Неправильное понимание соотношения между прямой и обратной теоремами часто служит источником ошибок при доказательстве тождеств и решении уравнений. Ошибки эти такого характера. Если нужно убедиться в справедливости равенства, то над ним выполняют ряд законных преобразований и приходят к равенству, верность которого очевидна. На основании этого делают заключение: исходное равенство верно, хотя самое верное равенство получают, иногда исходя из верного, а иногда — из неверного равенства.

Например, из $\alpha=\beta$ мы получим верное равенство $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$ как при $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, так и при $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{5}{4}\pi$. Но во втором случае видим, что $\alpha\neq\beta$. Таким образом исходное равенство может быть как верно, так и неверно при одних и тех же преобразованиях и одном и том же результате этих преобразований.

Почему же так происходит? Переходя от одного равенства (предложение A) к другому (предложение B), мы устанавливаем, что если есть A, то есть и B. Но сделать обратное заключение (если есть B, то есть и A), т. е. утверждать, что от нового равенства можно перейти к исходному, можно лишь после специального доказательства обратной теоремы (если есть B, то есть и A). Таким образом, переходя от первого равенства ко второму, мы устанавливаем, что второе есть *следствие первого*. Если же мы можем от второго равенства перейти к первому, то первое также будет *следствием второго* и равенства будут *равносильны*. В этом случае из верности полученного равенства следует верность исходного. Практически, чтобы быть уверенным в равносильности равенств, достаточно проверять обратимость выкладок, с помощью которых был выполнен переход от исходного равенства к новому (преобразованному), т. е. проверять возможность выполнения выкладок в обратном порядке. Если обратимость имеет место, то исходное и преобразованное равенства равносильны.

Такие же ошибки имеют место при доказательстве и решении неравенств

Пример 7. Доказать тождество

$$\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ = \frac{1}{2}.$$

Решение. Преобразовав сумму косинусов в произведение (обратимая операция), придем к равносильному равенству

$$2\cos 36^\circ \cos 12^\circ - 2\cos 36^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{2}.$$

Выносим общий множитель за скобку, а выражение в скобках (разность косинусов) преобразуем в произведение. Обе операции обратимы, и новое равенство равносильно исходному. Найдем

$$4\cos 36^\circ \sin 18^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Дальше производим следующие обратимые операции: умножение и деление левой части на одно и то же число, отличное от нуля; преобразование с помощью формулы синуса двойного угла (два раза); преобразование с помощью формулы приведения; деление числителя и знаменателя дроби на одно и то же число, отличное от нуля. Получим соответственно:

$$\frac{4\cos 18^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{1}{2}; \quad \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\sin 72^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\cos 18^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Мы получили очевидное равенство, а так как все примененные операции обратимы, то тождество доказано. Если бы при этих же операциях мы пришли к невозможному равенству, например $2 = \frac{1}{2}$, то и заданное равенство было бы невозможно.

Замечание. При решении задач не следует давать столь тщательную аргументацию и подробную запись произведенных действий, как это сделано в рассмотренном примере. Здесь это было уместно, так как цель данного примера состояла в иллюстрации п. 13. Чаще, выписав левую часть равенства, преобразовывают ее до тех пор, пока не получат правую (если доказываемое равенство верное). Главное при этом — внимательно следить за обратимостью применяемых операций.

Пример 8. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt[n]{a-x}}{x^2} - \frac{\sqrt[n]{a-x}}{a^2} = \sqrt[n]{\frac{x^2}{a+x}},$$

где n — четное число и больше 0.

Решение. Так как в иррациональных уравнениях, рассматриваемых в элементарной математике, корни предполагаются *арифметическими*, то $a - x > 0$, $a + x > 0$ и, кроме того, левая часть уравнения должна быть положительна, так как правая положительна (почему?).

Совместное рассмотрение неравенств дает: $x < a$, $x > -a$,

$-a < x < a$ или $|x| < a$. Отсюда же следует, что $a > 0$. Делаем следующие преобразования:

$$\sqrt[n]{a-x}\,\frac{a^2-x^2}{a^2x^2} = \sqrt[n]{\frac{x^2}{a+x}};\quad \sqrt[n]{a-x}\,\frac{a^2-x^2}{x^2}\sqrt[n]{\frac{a+x}{x^2}} = a^2;$$

$$\sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2}}\,\frac{a^2-x^2}{x^2} = a^2;\quad \left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^{\frac{n+1}{n}} = a^2;\quad \frac{a^2-x^2}{x^2} =$$

$$= a^{\frac{2n}{n+1}};\quad a^2 = \left(1 + a^{\frac{2n}{n+1}}\right)x^2;\quad x = \frac{a}{\pm\sqrt{1 + a^{\frac{2n}{n+1}}}}.$$

Выполнив первое преобразование (вынесение общего множителя за скобку и приведение дробей к общему знаменателю), мы совершили обратимую операцию над левой частью уравнения. Попутно мы убедились, что левая часть больше нуля, так как из неравенства $|x| < a$ следует неравенство $a^2 - x^2 > 0$. Если бы оказалось, что левая часть уравнения меньше нуля, то можно было бы сразу объявить, что уравнение не имеет решений. В дальнейшем производились следующие операции: умножение и деление на число, не равное нулю; умножение и деление на рациональные алгебраические выражения, не обращающиеся в нуль; умножение, деление и другие действия над корнями. Но корни здесь арифметические, поэтому все операции обратимы. Следовательно, последнее равенство равносильно исходному. Но на этом решение еще не оканчивается. Ведь последнее равенство может быть верно, а может быть и неверно. Верно оно будет, если

$$\frac{a}{\sqrt{1 + a^{\frac{2n}{n+1}}}} < a$$

(ведь $|x| < a$). Но это выполняется при любом $a > 0$, так как

$$\sqrt{1 + a^{\frac{2n}{n+1}}} > 1.$$

Поэтому исходное уравнение имеет два корня

$$x_{1,2} = \pm\frac{a}{\sqrt{1 + a^{\frac{2n}{n+1}}}}$$

и только два этих корня.

Замечание. При решении иррациональных уравнений принято испытывать найденные значения неизвестного, чтобы обнаружить посторонние корни. Появиться они могут по той причине, что при решении иррациональных уравнений возводят обе части уравнения в целую степень, например в квадрат, что обычно приводит к уравнению, не равносильному исходному. В данном примере тоже было возведение в целую степень, а именно в степень n, но *в испытании полученных значений x нет необходимости*, так как мы получили уравнение, *равносильное* данному. Во многих случаях, решая

иррациональное уравнение, выгодно поступать так, как было сделано здесь, особенно если уравнение содержит параметры, и испытывать найденные значения неизвестного путем подстановки их в исходное уравнение затруднительно.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{3a-5} = 3 - \sqrt{2a}. \qquad (*)$$

Решение. Так как корни предполагаются арифметическими, то должно быть: $3a-5 \geqslant 0$, $2a \geqslant 0$, $3 - \sqrt{2a} \geqslant 0$ (последнее потому, что $\sqrt{3a-5} \geqslant 0$). Из первых двух получаем: $a \geqslant 0$, $a \geqslant \frac{5}{3}$ или $a \geqslant \frac{5}{3}$. Неравенство $3 - \sqrt{2a} \geqslant 0$ перепишем в виде $3 \geqslant \sqrt{2a}$ и почленно возведем в квадрат. Эта операция приведет к неравенству $9 \geqslant 2a$, равносильному исходному, так как обе части неравенства положительны (см. пример 4). Получим $a \leqslant \frac{9}{2}$ или, объединяя с ранее полученным, $\frac{5}{3} \leqslant a \leqslant \frac{9}{2}$. При этом знаки равенства должны быть отброшены (почему?). Итак, уравнение (*) не имеет решения, если a не удовлетворяет неравенствам

$$\frac{5}{3} < a < \frac{9}{2}. \qquad (**)$$

Предположим, что a удовлетворяет соотношениям (**). Тогда обе части уравнения (*) положительны, и возведение его в квадрат приведет к уравнению

$$3a - 5 = 9 - 6\sqrt{2a} + 2a,$$

равносильному данному. Переписав последнее в виде

$$6\sqrt{2a} = 14 - a,$$

снова возведем равенство в квадрат, что даст

$$72a = 196 - 28a + a^2$$

или

$$a^2 - 100a + 196 = 0.$$

Возведение в квадрат здесь тоже приводит к равносильному уравнению, так как $6\sqrt{2a} > 0$ и $14 - a > 0$. Итак, полученное квадратное уравнение равносильно уравнению (*) при условии $\frac{5}{3} < a < \frac{9}{2}$. Но это квадратное уравнение имеет корни $a_1 = 2$ и $a_2 = 98$. Из них только первый больше $\frac{5}{3}$ и меньше $\frac{9}{2}$. Следовательно, данное уравнение (*) имеет один и только один корень, равный 2. Испытывать его путем подстановки в исходное уравнение *не требуется.*

Пример 10. При каких x справедливо неравенство

$$\sin x > \sqrt{1 - \sin 2x}?$$

Решение. Так как $\sqrt{1-\sin 2x}$ арифметический, то $\sin x > 0$. Следовательно, если $\sin x \leqslant 0$, то неравенство не имеет решения. Пусть выполняется условие $\sin x > 0$. Тогда, возведя неравенство в квадрат, получим

$$\sin^2 x > 1 - \sin 2x.$$

Новое неравенство равносильно данному при условии $\sin x > 0$, потому что обе части неравенства, которое мы возвели в квадрат, неотрицательны. Производя далее операции, обратимость которых очевидна, получим соответственно:

$$\sin^2 x > 1 - 2\sin x \cos x;\ 2\sin x \cos x + \sin^2 x - 1 > 0;$$

$$2\sin x \cos x - \cos^2 x > 0;\ \cos x\,(2\sin x - \cos x) > 0.$$

Последнее неравенство равносильно данному, конечно, при условии $\sin x > 0$. Но произведение двух чисел положительно в том и только в том случае, когда оба сомножителя имеют одинаковые знаки. Поэтому последнее неравенство равносильно следующим системам неравенств:

$$\begin{cases} \cos x < 0; \\ 2\sin x - \cos x < 0; \\ \sin x > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \cos x > 0; \\ 2\sin x - \cos x > 0; \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Первая система противоречива. Действительно, если $\sin x > 0$, а $\cos x < 0$, то не может быть $\cos x > 2\sin x$ (в левой части неравенства отрицательное число, а в правой — положительное). Что касается второй системы, то, учитывая, что $\cos x > 0$, ее можно заменить следующей, равносильной:

$$\begin{cases} \sin x > 0; \\ \cos x > 0; \\ \operatorname{tg} x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Но в таком случае соответствующие углы оканчиваются в первом квадранте, а так как $\operatorname{tg} x > \frac{1}{2}$, то решения должны удовлетворять соотношениям

$$2k\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Замечание. Данное неравенство также легко решается, если преобразовать правую часть следующим образом:

$$\sqrt{1-\sin 2x} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x} =$$

$$= \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = |\sin x - \cos x|.$$

§ 4. Необходимые и достаточные условия

14. Рассмотрим теорему «если целое число оканчивается нулем, то оно делится на 5». Это верно, как известно из арифметики. Про условие этой теоремы говорят, что оно является *достаточным* для делимости числа на 5. Теорему же можно сформулировать так: «если целое число оканчивается нулем, то этого *достаточно* для того, чтобы оно делилось на 5». Однако для делимости на 5 числу ие обязательно оканчиваться нулем. Оно могло бы оканчиваться и цифрой 5. Поэтому неверно было бы утверждать, что для делимости числа на 5 ему *необходимо* оканчиваться нулем. Таким образом, высказанное условие делимости числа на 5, *будучи достаточным, не является необходимым*

Рассмотрим другую теорему: «для того чтобы углы были вертикальными, они должны быть равны». Здесь равенство углов есть *необходимое, но не достаточное условие* того, чтобы углы были вертикальными. Например, углы при основании равнобедренного треугольника равны, но они не вертикальные.

Но бывает и так, что условие является одновременио и *необходимым*, и *достаточным*, например: «в одном и том же круге для равенства его хорд необходимо и достаточно, чтобы эти хорды были одинаково удалены от центра данного круга». В этом утверждении заключены две теоремы, причем если одну из них назвать прямой, то вторая будет обратной:

1) в одном и том же круге равные хорды одинаково удалены от центра этого круга;

2) в одном и том же круге хорды, одинаково удаленные от центра этого круга, равны.

Таким образом, прямая и обратная теоремы, если онн справедливы, являются иным выражением условия *и необходимости, и достаточности*.

15. Когда справедливы прямая и обратная теоремы, то часто их объединяют в одном предложении. Как это делается разъясиим иа примере. Рассмотрим две теоремы

1) если четырехугольник — параллелограмм, то его диагонали, пересекаясь, делятся точкой пересечения пополам;

2) если диагонали четырехугольника, пересекаясь, делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Сформулированные две теоремы можио выразить одиим предложением так: «для того чтобы четырехугольиик был параллелограммом, *необходимо и достаточно*, чтобы его диагонали, пересекаясь, точкой пересечения делились пополам».

Иногда вместо выражения «необходимо и достаточно» употребляют и другие, например «тогда и только тогда», «в том н только в том случае». Таким образом, ту же теорему можно

высказать так: «четырехугольник будет параллелограммом *тогда и только тогда*, когда его диагонали, пересекаясь, делятся точкой пересечения пополам» или «четырехугольник будет параллелограммом *в том и только в том случае*, когда его диагонали, пересекаясь, делятся в точке пересечения пополам».

Заметим, что свойство диагоналей делиться пополам точкой пересечения является свойством, *характеризующим параллелограмм* как определенный вид четырехугольника. По этой причине последнюю теорему можно было бы принять за определение параллелограмма. Тогда то определение параллелограмма, которое принято в геометрии, стало бы теоремой.

В заключение подчеркнем, что математическое предложение, в котором употреблено выражение «необходимо и достаточно» или равносильное ему, будет доказано, если доказать и прямую, и обратную теоремы, объединенные в этом предложении.

Пример 11. Доказать, что необходимым и достаточным условием тождественности двучленов $ax + b$ и $a_1x + b_1$ является равенство их коэффициентов при одинаковых степенях буквы x, т. е. $a = a_1$, $b = b_1$.

Решение. 1. Необходимость. Дано: $ax + b = a_1x + b_1$. Доказать: $a = a_1$, $b = b_1$.

Доказательство. Два математических выражения называются тождественными, если их численные значения равны при всех допустимых значениях входящих в них букв. Поэтому, положив в равенстве $ax + b = a_1x + b_1$ сперва $x = 0$, а потом $x = 1$, получим: $b = b_1$, $a = a_1$.

2. Достаточность. Дано: $a = a_1$ и $b = b_1$. Доказать: $ax + b = a_1x + b_1$.

Доказательство. Так как $a = a_1$ и $b = b_1$, то при одном и том же x мы получим равные численные значения для $ax + b$ и $a_1x + b_1$ в силу однозначной выполнимости действий умножения и сложения.

Пример 12. Треугольник будет равнобедренным в том и только в том случае, когда две его биссектрисы равны.

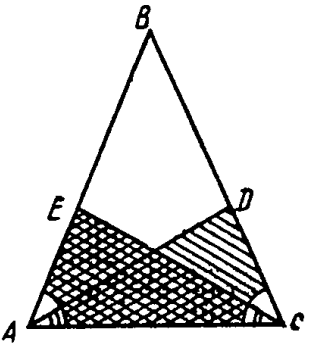

Рис. 2

Решение 1. Дано: в $\triangle ABC$ (рис. 2) $AB = CB$, $\angle BAD = \angle DAC$, $\angle BCE = \angle ECA$.

Доказать: $AD = CE$.

Доказательство. AC — общая сторона треугольников ADC и CEA; $\angle DCA = \angle EAC$, как углы при основании равнобедренного треугольника; $\angle DAC = \angle ECA$, как половины равных углов EAC и DCA. Следовательно, $\triangle ADC = \triangle CEA$ по второму признаку равенства треугольников. Но в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны. Поэтому $AD = CE$.

2. Дано. в $\triangle ABC$ (рис. 3) $\angle BAD = \angle DAC$, $\angle BCE = \angle ECA$ и $AD = CE$.

Доказать: $AB = BC$.

Доказательство. Допустим, что $AB < BC$. Тогда $\angle BAC = 2\beta$ будет больше $\angle BCA = 2\alpha$, а следовательно, и $\beta > \alpha$. Обращаемся к треугольникам ADC и CEA. У них сторона AC общая, $AD = CE$ по условию, а углы α и β, заключенные между соответственно равными сторонами, как получено выше, не равны, а именно $\beta > \alpha$. Но тогда по известной теореме о неравных треугольниках сторона CD треугольника ADC больше стороны AE треугольника CEA. Итак, $CD > AE$. Чтобы получить противоречие этому неравенству, проведем отрезок EF, равный и параллельный AD, и соединим точку F с D и C отрезками прямых. В $\triangle CEF$ $EC = EF$ ($EF = AD$ по построению, а $EC = AD$ по условию), а $\angle EFC = \angle ECF$, как лежащие против этих равных сторон. Если же учесть, что $\angle EFD = \beta$, как угол параллелограмма $AEFD$, противолежащий $\angle EAD$, то можно написать (см. рис. 3):

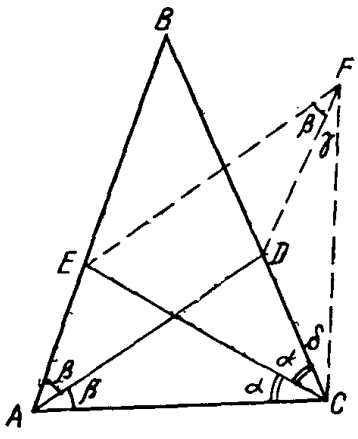

Рис. 3

$$\beta + \gamma = \alpha + \delta;\ \delta - \gamma = \beta - \alpha > 0;\ \delta > \gamma.$$

Но в треугольнике против меньшего угла лежит и меньшая сторона. Отсюда $CD < FD$, а так как $FD = AE$, как противоположные стороны параллелограмма, то $CD < AE$. Полученное неравенство противоречит ранее доказанному: $CD > AE$. Итак, предположение $AB < BC$ должно быть отвергнуто. Так же убедимся, что не может быть и $BC < AB$. Но тогда должно быть $AB = BC$.

Пример 13. Треугольник, два угла α и β которого острые, тогда и только тогда будет тупоугольным, когда $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta < 1$.

Решение 1. Дано: α, β, γ — углы треугольника, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$.

Доказать $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta < 1$.

Доказательство. Так как $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ и $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$, то $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}$. Но тогда $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. Итак, $\operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. Умножая обе части этого неравенства на $\operatorname{tg}\beta > 0$, получим $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta < 1$.

2. Дано: α, β, γ — углы треугольника, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta<1$.

Доказать: $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$.

Доказательство. Так как $\operatorname{tg}\beta>0$ и $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta<1$, то $\operatorname{tg}\alpha<\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$. Итак, $\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$. Но для острых углов x и y из неравенства $\operatorname{tg}x<\operatorname{tg}y$ следует неравенство $x<y$. В данном случае $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $0<\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$, поэтому из неравенства $\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ получаем: $\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta$, $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<-(\alpha+\beta)<0$, $\frac{\pi}{2}<\pi-(\alpha+\beta)<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$.

Упражнения

Выяснить, какие из приведенных ниже предложений, выраженных словами или формулами, относят в элементарной математике к определениям, аксиомам, теоремам (1—12)

1. Если число a — корень многочлена, то этот многочлен делится на $x-a$

2. Если стороны одного угла составляют продолжение сторон другого, то такие углы вертикальные.

3. Функция $\sin x$ периодическая.

4. Если к равным величинам прибавить поровну, то равенство не нарушится

5. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

6. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

7. Комплексное число вида $a+0i$ считается равным вещественному числу a

8. Две касающиеся окружности имеют общую касательную в точке касания

9. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.

10. Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя

11. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ существует предел частной суммы $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ при $n\to\infty$.

12. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, где S_n — частная сумма этой прогрессии

Сформулировать определения (13—14)

13. Биссектрисы угла и биссектрисы треугольника

14. Перпендикуляра к прямой и высоты треугольника

15. Широко распространено такое определение перпендикулярным сечением призмы называется многоугольник, получаемый при пересечении призмы плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам

Всякая ли призма, согласно этому определению, имеет перпендикулярное сечение?

16. Когда говорят «расстояние от точки до прямой», то разумеют кратчайшее расстояние, измеряемое по перпендикуляру, опущенному из этой точки на рассматриваемую прямую.

Как определить расстояние от точки до *отрезка* прямой, положив в основу тот же принцип «кратчайшего расстояния»?

Сформулировать и доказать теоремы обратные следующим (17 — 19):

17. Диагонали ромба делят его углы пополам

18. Если из точки, взятой вне круга, проведены к нему какая-нибудь секущая и касательная, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

19. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований.

Пользуясь законом обратимости, доказать теоремы (20—21):

20. Обратную теореме Пифагора

21. Обратную теореме о квадрате стороны треугольника, лежащей против тупого угла.

Решить задачи (22—27), следя за обратимостью преобразований:

22 Доказать

$$256\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 30^\circ \cos 40^\circ = 3.$$

23. При каких α справедливо равенство

$$\sqrt{1-\cos\alpha}+\sqrt{1+\cos\alpha}=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)?$$

24. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x^2}}}-\sqrt{\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{a^2}}}=\frac{2n}{\sqrt{x}},$$

где n — натуральное число, большее 1

25. Решить уравнение

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=\sqrt{x-3}.$$

26. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_x 5\sqrt{5}+\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}}=-\sqrt{6}\log_x\sqrt{5}.$$

27. Найти острые углы x, для которых справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sin^2 x(1-\operatorname{tg} x)}>8.$$

В следующих утверждениях заменить многоточия словами «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно» так, чтобы утверждение было справедливо (28—36):

28. Для того чтобы число делилось на 2 .. чтобы оно делилось на 4

29. Для того чтобы четырехугольник был ромбом ... чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны

30. Для того чтобы треугольник был тупоугольным ... чтобы два его угла были острыми.

31. Для справедливости формулы $\log_a x^2 = 2\log_a(-x)$ ... чтобы число x было отрицательным

32. Для того чтобы прямые были параллельны ... чтобы они не имели общей точки

33. Для того чтобы многочлен делился на $x-a$ ... чтобы число a было корнем этого многочлена

34. Для того чтобы равенство $\operatorname{tg} x = 1$ было справедливо ... чтобы $x=\frac{\pi}{4}$.

35. Для того чтобы треугольники были равновелики ... чтобы их основания и высоты были попарно равны

36. Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником ..., чтобы все его углы были равны между собой

Доказать теоремы (37—42):

37. Для того чтобы дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ не зависела от x, необходимо и достаточно, чтобы $ad = bc$.

38. Для того чтобы уравнения $a_1x + b_1 = 0$ и $a_2x + b_2 = 0$, где $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, были совместны, необходимо и достаточно, чтобы $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

39. Трапеция будет равнобедренной в том и только в том случае, когда ее диагонали равны.

40. Равнобедренная трапеция имеет взаимно перпендикулярные диагонали тогда и только тогда, когда ее высота и средняя линии равны

41. Для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы две его медианы были равны

42. Для того чтобы стороны a, b, c треугольника составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$, где A, B, C — углы треугольника, противолежащие сторонам a, b, c, также составляли арифметическую прогрессию

Глава II

Числа, изучаемые в элементарной математике

§ 1. Числа, рассматриваемые в арифметике

16. Единица или собрание нескольких единиц называется целым (натуральным) числом. Ряд таких чисел 1, 2, 3, 4, ... называется натуральным. Натуральный ряд бесконечен.

Одна доля или собрание нескольких одинаковых долей единицы называется дробью. Целое число с дробью образует смешанное число. Дроби и смешанные числа называются дробными числами

В арифметике рассматриваются натуральные числа, дробные числа и число нуль. Эти числа, за исключением нуля, называются положительными*.

Нуль и всякое положительное число могут быть представлены в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число или нуль, а n — целое число. Такое представление единственное.

Любые два числа могут быть соединены одним и только одним знаком взаимного расположения $=$ (равенства), $>$ (больше), $<$ (меньше)

Например: $2 = \frac{4}{2}$, $\frac{5}{2} > 1$, $3 < \frac{10}{2}$. Любое положительное число a больше нуля ($a > 0$).

Числа, связанные знаком «равенства», образуют равенство; числа, связанные знаком «больше» или «меньше», образуют неравенство. Про неравенство говорят, что оно необратимо, понимая под этим следующее если $a > b$, то $b < a$, и если $a < b$, то $b > a$. Про неравенство (а также про равенство) говорят, что оно транзитивно, имея при этом в виду такое свойство: если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (а для равенства: если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$). Все эти свойства имеют место для чисел, рассматриваемых в арифметике. Если еще к этому добавить так называемое свойство рефлексивности равенства. $a = a$, то все прочие свойства равенства и неравенства

* Точнее, рациональными положительными. Обычно термин «положительное число» вводится после определения отрицательного числа Однако преждевременное против обычного введение нами этого термина облегчает изложение и не должно смутить окончившего среднюю школу.

(например, если $a = b$, то $b = a$) можно вывести из перечисленных выше

17. Нахождение по нескольким данным числам одного нового числа называется арифметическим действием. В арифметике рассматриваются шесть действий: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень и извлечение корня

Все эти действия достаточно известны, и на определении их нет надобности останавливаться.

Отметим специально действия над числами, среди которых есть нуль. Сложение числа с нулем дает то же число ($3 + 0 = 3$). Вычитание нуля из числа дает то же число ($3 - 0 = 3$). Умножение числа на нуль дает произведение, равное нулю ($3 \cdot 0 = 0$). Деление нуля на число, отличное от нуля, дает нуль $\left(\frac{0}{3} = 0\right)$. Возведение нуля в целую степень и извлечение корня из нуля дает в результате нуль.

Сложение, умножение и возведение в степень всегда выполнимы с однозначным результатом. Что касается *обратных* им действий — вычитания, деления и извлечения корня, то вычитание возможно, когда уменьшаемое не меньше вычитаемого, извлечение корня — когда подкоренное число есть точная степень положительного числа с показателем степени, кратным показателю корня, и лишь деление всегда выполнимо, если делитель не нуль.

На нуль делить нельзя! Если делимое не равно нулю, а равно, например, числу 20, то от деления числа 20 на нуль, если бы оно было возможно, получилось бы частное, которое после умножения на нуль даст нуль, а не 20 Если и делимое и делитель равны нулю, то тогда любое число удовлетворит определению частного, и задача деления становится неопределенной

18. Сумма и произведение чисел подчиняются следующим основным законам

1) сумма не изменяется от перемены порядка слагаемых (переместительный, или коммутативный, закон сложения): $a + b = b + a$;

2) сумма не изменится, если какую-либо группу рядом стоящих слагаемых заменить их суммой (сочетательный, или ассоциативный, закон сложения): $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$;

3) произведение не изменяется от перемены порядка сомножителей (переместительный, или коммутативный, закон умножения): $ab = ba$;

4) произведение не изменится, если какую-либо группу рядом стоящих сомножителей заменить их произведением (сочетательный, или ассоциативный, закон умножения): $abc = (ab)c = a(bc)$;

5) чтобы умножить число на сумму чисел, достаточно умно-

жить это число на каждое слагаемое отдельно и результаты сложить (распределительный, или дистрибутивный, закон умножения относительно суммы) $a(b+c)=ab+ac$.

19. Используя основные законы и свойства равенства, можно получить дальнейшие свойства сложения, вычитания, умножения и деления. Приведем важнейшие из них:

1) чтобы прибавить сумму чисел, достаточно прибавить каждое слагаемое одно за другим,

2) чтобы прибавить число к сумме, достаточно прибавить это число к какому-нибудь слагаемому, оставив остальные без изменения;

3) чтобы прибавить разность, достаточно прибавить уменьшаемое и от результата отнять вычитаемое;

4) чтобы вычесть сумму, достаточно вычесть каждое слагаемое одно за другим;

5) чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть это число из какого-нибудь слагаемого, оставив остальные без изменения;

6) чтобы вычесть разность, достаточно вычесть уменьшаемое и к результату прибавить вычитаемое;

7) чтобы умножить на произведение, достаточно умножить на первый сомножитель, полученный результат — на второй сомножитель и т. д.;

8) чтобы умножить произведение на число, достаточно умножить на это число какой-нибудь сомножитель, оставив остальные без изменения;

9) чтобы разделить сумму на число, достаточно разделить на это число каждое слагаемое и результаты сложить;

10) чтобы разделить разность на число, достаточно разделить на это число уменьшаемое, затем вычитаемое и из первого результата вычесть второй;

11) чтобы разделить на произведение, достаточно разделить на первый сомножитель, полученный результат — на второй сомножитель и т. д.;

12) чтобы разделить произведение на число, достаточно разделить на это число какой-нибудь сомножитель, оставив остальные без изменения.

20. Если числа, над которыми производится арифметическое действие, изменить, то, вообще говоря, изменится и результат этого действия Приведем важнейшие случаи того, как этот результат меняется:

1) если одно слагаемое увеличнть (уменьшить) на некоторое число, не изменяя остальных слагаемых, то и сумма увеличится (уменьшится) на это число;

2) если уменьшаемое увеличить (уменьшить) на некоторое число, не изменяя вычитаемого, то и разность увеличится (уменьшится) на это число;

3) если вычитаемое увеличить (уменьшить) на некоторое число, не изменяя уменьшаемого, то разность уменьшится (увеличится) на это число;

4) если один из сомножителей увеличить (уменьшить) в некоторое число раз, не изменяя остальных сомножителей, то и произведенне увеличится (уменьшится) в то же число раз;

5) если делимое увеличить (уменьшить) в некоторое число раз, не изменяя делителя, то и частное увеличится (уменьшится) в то же число раз;

6) если делитель увеличить (уменьшить) в некоторое число раз, не изменяя делимого, то частное уменьшится (увеличнтся) в то же число раз;

7) если уменьшаемое и вычитаемое увеличить или уменьшить на одно и то же число, то разность не изменится;

8) если делимое и делитель увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, то частное не изменится.

21. Дробь $\frac{m}{n}$, где n — натуральное число, а m — натуральное число или нуль, называют также обыкновенной или простой дробью. Если знаменатель обыкновенной дробн есть натуральная степень десяти, т. е. 10, 100, 1000 и т. д., то ее называют десятичной дробью. Обозначение десятичных дробей общеизвестно. Например, $\frac{123}{100} = 1{,}23$. Если знаменатель простой дроби не содержит никаких иных множителей, кроме чисел 2 и 5, то такая дробь обращается в десятичную. Проще всего осуществить это обращение, если разделить по известным правилам числитель на знаменатель. Если же знаменатель дроби имеет простые множители, отличные от чисел 2 и 5, и эти множители не сокращаются с числителем, то дробь не может быть обращена в десятичную. Однако делить числитель на знаменатель можно было бы и в этом случае, увеличивая каждый раз новый остаток в 10 раз и получая вследствне этого все новые и новые десятичные знаки. Но до какого бы десятичного знака ни было доведено деление, его можно продолжать и получать следующие десятнчные знаки. Про такие простые дроби условилнсь говорить, что они разлагаются в бесконечную десятичную дробь. Например, дроби $\frac{2}{13}$ соответствует бесконечная десятичная дробь 0,15384615..., так что пишут $\frac{2}{13} = 0{,}15384615\ldots$. В отличие от бесконечных десятичных дробей те десятичные дроби, которые приводятся к простым со знаменателями вида 10, 100, 1000, ... , называют конечными десятичными дробями.

Про бесконечную десятичную дробь говорят, что она задана, если указано правило, по которому можно написать любой ее десятичный знак. Например, в случае обращеиия простой дробн

в бесконечную десятичную правило деления чисел дает правило нахождения любого десятичного знака получающейся бесконечной дроби. Однако возможны бесконечные десятичные дроби, происхождение которых иное, чем то, которое здесь было рассмотрено.

22. Бесконечная десятичная дробь, у которой одна или несколько цифр постоянно повторяются в одной и той же последовательности, называется **периодической** десятичной дробью. Цифра или совокупность цифр, которые повторяются в периодической дроби, образуют число, называемое **периодом** этой дроби. Если период дроби начинается сразу после запятой, то дробь называется **чистой периодической**, если же между запятой и первым периодом есть число, которое не повторяется, то дробь называется **смешанной периодической**. Например, дробь 0,313131... — чистая периодическая с периодом 31, а 1,2444 .. — смешанная периодическая с периодом 4. Первую кратко обозначают так: 0,(31), вторую — 1,2(4).

Любая несократимая обыкновенная дробь, знаменатель которой содержит простые множители, отличные от множителей 2 и 5, обращается в периодическую дробь. При этом, если множители 2 и 5 вообще отсутствуют, то получится чистая периодическая дробь, а при наличии множителей 2 и 5 или обоих — смешанная периодическая.

С другой стороны, любая периодическая дробь может быть обращена в обыкновенную. Для этого существуют следующие два правила:

1) чтобы обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную, достаточно ее период сделать числителем, а знаменателем написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде,

2) чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, достаточно из числа, стоящего после запятой до второго периода, вычесть число, стоящее после запятой до первого периода, и разность сделать числителем, а знаменателем написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями справа, сколько цифр между запятой и периодом.

Строго теория периодических дробей может быть изложена с помощью теории пределов. В частности, вопрос об обращении периодической дроби в обыкновенную обычно рассматривается в связи с вопросом о сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии (см. п. 81).

Пример 14. Обратить в обыкновенные дроби следующие периодические

а) 1,252525... ; б) 3,1222.. ; в) 0,1999...

Решение. а) $1,(25) = 1\frac{25}{99}$; б) $3,1(2) = 3\frac{12-1}{90} = 3\frac{11}{90}$;

в) $0,1(9) = \frac{19-1}{90} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$.

23. Обыкновенная дробь, обращающаяся в конечную десятичную, может быть представлена и бесконечной десятичной дробью, причем не одним способом. Например, можно написать:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 = 0{,}2000\ldots$$

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 = 0{,}1999\ldots$$

В первом случае период 0, а во втором 9. Первое равенство очевидно; а в справедливости второго легко убедиться с помощью правила обращения периодической дроби в простую (см пример 14, в). Представляя конечную десятичную дробь в виде периодической, условимся всегда считать ее периодом число 0 (или 9). Тогда справедливо следующее утверждение. *всякое число, рассматриваемое в арифметике, может быть представлено периодической дробью, и такое представление единственное.*

§ 2. Рациональные числа

24. Каждое число натурального ряда 1, 2, 3, 4, ..., начиная со второго, на единицу больше, чем предыдущее. И как бы далеко ни отойти от первого числа (от единицы), для него всегда найдется следующее, обладающее указанным свойством. Если же, начав с какого-нибудь числа натурального ряда, идти в обратном направлении, т. е. справа налево, то в этом случае каждое следующее число будет на единицу меньше предыдущего. Однако это движение прекратится, как только мы дойдем до числа 1. Впрочем, есть число 0, которое на единицу меньше числа 1, поэтому можно сделать еще один шаг и приписать число 0 левее числа 1. Но далее написать какое-нибудь число мы не в состоянии, имея в своем распоряжении лишь те числа, которые известны из арифметики На самом деле, для этого пришлось бы вычитать из нуля единицу, а по правилам арифметики такое вычитание невыполнимо, поскольку нуль меньше единицы. Для математики и ее приложений оказывается невыгодным такое ограничение. Поэтому, кроме известных из арифметики чисел, вводят *новые числа.* Введем новое число, меньшее нуля на единицу, и обозначим его знаком —1. Затем введем новое число, меньшее числа —1 на единицу, и обозначим его знаком —2. Продолжая так поступать, мы введем новые числа: —3, —4, —5, ..., т. е. можно написать ряд чисел:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

который является естественным обобщением натурального ряда.

В этом ряду для каждого натурального числа, например для числа 125, найдется соответствующее число, изображенное теми же цифрами, взятыми в той же последовательности, что в данном натуральном, и снабженное знаком минус, поставленным

впереди числа, а именно число — 125. Эти новые числа называются целыми отрицательными числами. По такому же способу введем понятие дробного отрицательного числа, соответствующего некоторому положительному. Например, положительному числу $\frac{13}{2}$ соответствует отрицательное число $-\frac{13}{2}$.

25. Все сказанное в предыдущем пункте об отрицательных числах является лишь разъяснением того, как строятся эти числа исходя из наличия положительных чисел. Но это не является ни разъяснением существования отрицательных чисел, ни тем более доказательством их существования. При строгом изложении теории введение новых объектов, в данном случае отрицательных чисел, должно быть сделано с помощью определения, которое *не нуждается в доказательстве*.

Дадим теперь *определение* отрицательного числа.

Если каждому положительному числу a поставить в соответствие новый математический объект, обозначаемый символом $-a$, то эти объекты называются отрицательными числами.

Здесь соответствие между a и $-a$ взаимное, и эти взаимно соответствующие числа a и $-a$ называются противоположными.

Таким образом, переход от положительного числа a к отрицательному $-a$ обозначается постановкой знака минус перед положительным числом. Условились так же обозначать и переход от отрицательного числа к положительному, т. е. $-(-a)$ считать числом a. Поэтому в противоположных числах a и $-a$ под буквой a можно подразумевать как положительное, так и отрицательное число Что касается нуля, который не относится *ни к положительным, ни к отрицательным числам*, то его считают противоположным самому себе.

Целые и дробные положительные числа, целые и дробные отрицательные числа и число 0 — все вместе называются рациональными числами

Целые и дробные положительные (отрицательные) числа называют рациональными положительными (отрицательными) числами

Иногда с целью противопоставления положительного числа отрицательному ставят знак плюс перед положительным числом и пишут, например, $+2$ вместо 2. Но различия между $+2$ и 2 нет.

Абсолютной величиной положительного числа называется само это число. Абсолютной величиной отрицательного числа называется противоположное ему число. Абсолютная величина нуля есть нуль.

26. После того как дано определение рационального числа, вводятся понятия равенства и неравенства рациональных чисел. Эти понятия тоже являются *определениями*, а не теоремами и потому *не нуждаются в доказательстве*. Формулируются они так, чтобы соответствующие понятия для положительных чисел, известные из арифметики, оставались справедливыми.

Будем считать по определению:

1) два рациональных числа равны, если равны их абсолютные величины и у них одинаковые знаки;

2) любое отрицательное число меньше нуля и меньше любого положительного числа;

3) любое положительное число и нуль больше любого отрицательного числа;

4) из двух отрицательных чисел то меньше, абсолютная величина которого больше; из двух отрицательных чисел то больше, абсолютная величина которого меньше.

Эти соглашения позволяют, как можно доказать, распространить основные свойства равенства и неравенства, сформулированные в п. 16 для положительных рациональных чисел и нуля, на числа рациональные Таким образом, свойство двух чисел быть соединенными одним и только одним знаком $=$, $>$ или $<$, свойства необратимости неравенств, транзитивности равенств и неравенств и другие справедливы для всех рациональных чисел. Но это уже *теорема* или, вернее, ряд теорем, которые в школьном курсе элементарной математики не принято доказывать. Однако об этом важно знать, чтобы не путать теоремы с определениями, а главное, чтобы иметь представление о том порядке, которого придерживаются при введении новых чисел.

27. Арифметические действия над рациональными числами тоже *должны быть определены*. Эти определения вводят так, чтобы сказанное в арифметике о действиях над положительными числами оставалось в силе Иначе говоря, мы считаем известными действия над положительными числами и формулируем дополнительные соглашения (определения) для тех случаев, когда среди чисел, над которыми производятся действия, есть отрицательные

1 Суммою двух отрицательных чисел называется сумма их абсолютных величин, взятая со знаком минус.

Суммою двух чисел, из которых одно положительное, а другое отрицательное, называется разность их абсолютных величин, взятая со знаком того из этих чисел, абсолютная величина которого больше.

Сумма двух противоположных чисел считается равной нулю

Сумма двух чисел, из которых одно равно нулю, считается равной второму числу: $a + 0 = a$.

Числа, по которым отыскивается сумма, называются сла-

гаемыми, а действие отыскания суммы по данным слагаемым — сложением.

Под сложением рациональных чисел в количестве, большем чем два, понимается, как и в арифметике, результат последовательного сложения этих чисел.

Все сказанное здесь о сложении есть определения и *в доказательстве не нуждается.*

Сложение рациональных чисел подчиняется основным законам — переместительному и сочетательному. Но это подлежит *доказательству*, чего в школьном курсе обычно не делают.

2. Вычитанием называется действие, обратное сложению, посредством которого по данной сумме (уменьшаемое) и данному слагаемому (вычитаемое) отыскивается другое слагаемое (разность).

Это — определение. Если уменьшаемое есть a и вычитаемое b, то разность чисел a и b обозначается $a-b$. Эту разность можно представить в виде $a+(-b)$ и написать: $a-b=a+(-b)$. Следовательно, *разность двух чисел равна сумме уменьшаемого и числа, противоположного вычитаемому.*

Но это должно быть *доказано*, как и факт существования разности чисел.

Выходит, что вычитание можно заменить сложением, а ряд последовательных сложений и вычитаний можно представить в виде суммы, которая называется алгебраической.

3. Произведением двух отрицательных чисел называется произведение их абсолютных величин, взятое со знаком плюс.

Произведением двух чисел, из которых одно положительное, а другое отрицательное, называется произведение их абсолютных величин, взятое со знаком минус.

Произведение двух чисел, из которых хотя бы одно равно нулю, считается равным нулю.

Числа, по которым отыскивается произведение, называются сомножителями, а действие отыскания произведения по данным сомножителям — умножением.

Под умножением рациональных чисел в количестве, большем чем два, понимается, как и в арифметике, результат последовательного умножения этих чисел

Все сказанное здесь об умножении есть определения и *в доказательстве не нуждается.*

Умножение рациональных чисел подчиняется основным законам — переместительному, сочетательному и распределительному. Но это подлежит *доказательству*, чего в школьном курсе обычно не делают.

4. Делением называется действие, обратное умножению, посредством которого по данному произведению (делимое) и данному сомножителю (делитель) отыскивается другой сомножитель (частное).

Это — определение. Исходя из него, легко доказывается известное правило знаков при делении, а также, что *на нуль делить нельзя.*

Свойства сложения, вычитания, умножения и деления, перечисленные в пп. 19 и 20 для положительных чисел, справедливы и для рациональных чисел.

Для всякого рационального числа $a \neq 0$ существует число $\frac{1}{a}$. Числа a и $\frac{1}{a}$ называются обратными по отношению друг к другу. *Нуль не имеет обратного числа.*

5. Произведение n одинаковых сомножителей, равных a, называется n-й степенью числа a. Это записывается так:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ раз}}.$$

Число a называется основанием степени, а натуральное число $n > 1$ — показателем степени. Действие отыскания степени по данному основанию и данному показателю называется возведением в степень.

Возведение в степень с натуральным показателем $n > 1$ рассматривается как частный случай умножения, а потому не требует каких-либо разъяснений. Для $n = 1$ полагают, по определению, $a^1 = a$.

6. Извлечением корня называется действие, обратное возведению в степень, посредством которого по данной степени (подкоренное число) и данному показателю степени (показатель корня) отыскивается основание (корень).

При этом предполагается, что показатель корня — натуральное число, большее единицы.

Это — определение. Таким образом, по определению,

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Первые пять действий всегда однозначно выполнимы в области рациональных чисел, за исключением деления на нуль. Извлечение корня выполнимо лишь в том случае, когда подкоренное число является точной степенью рационального числа с показателем степени, равным показателю степени корня.

В заключение укажем, что *всякое рациональное число может быть представлено в виде несократимой дроби* $\frac{m}{n}$, где m — целое число (положительное, отрицательное или нуль), а n — натуральное число. С другой стороны, как это следует из п. 23, *всякое рациональное число может быть представлено периодической дробью, и такое представление — единственное.* Обратно, всякая периодическая дробь есть рациональное число. Конечно, здесь имеются в виду не только те периодические дроби, кото-

рые рассматривались в арифметике, т. е. положительные, но и отрицательные.

Замечание. При изучении рациональных чисел рассматривают задачи, связанные с показаниями термометра, с движением точки по прямой в двух противоположных направлениях, и др. Следует иметь в виду, что эти задачи ничего не доказывают и приведением их здесь преследуется лишь методическая цель, состоящая в том, чтобы показать полезность введения отрицательных чисел, и целесообразность тех определений относительно соотношений между ними и действий над ними, которые приняты в математике.

§ 3. Вещественные (действительные) числа

28. Всякое рациональное число может быть представлено бесконечной периодической десятичной дробью. Если конечную десятичную дробь рассматривать как периодическую с периодом 0 (п. 23), то такое представление единственное.

В отличие от рационального числа всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь называется **иррациональным числом**. Такую дробь записывают в виде

$$a, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$$

или

$$-a, a_1a_2 \ldots a_n \ldots,$$

где a — натуральное число или нуль, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — десятичные знаки. В первом случае иррациональное число называется **положительным**, а во втором — **отрицательным**.

Рациональные и иррациональные числа все вместе называются **вещественными или действительными числами**.

Вещественное число считается **заданным**, если известно правило, с помощью которого можно написать любой его десятичный знак.

Пример 15. Пользуясь известным из алгебры правилом извлечения квадратного корня из числа, получим для $\sqrt{6}$ следующую бесконечную десятичную дробь: 2,44948... Так как указанное правило позволяет вычислить любой десятичный знак, то эта бесконечная десятичная дробь считается заданной.

Пример 16. Доказать, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Решение. Допустим противное, т. е. предположим, что существует такая несократимая дробь $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, что $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Тогда $\frac{m^2}{n^2} = 2$, $m^2 = 2n^2$ и, следовательно, $m = 2k$, т. е. m — четное число. Но тогда и n должно быть четным. Действительно, подставляя $m = 2k$ в равенство $m^2 = 2n^2$, найдем, что $4k^2 = 2n^2$, $n^2 = 2k^2$, а это и означает, что $n = 2l$. Итак, мы пришли к противоречию: нам дано, что дробь $\frac{m}{n}$ несократимая, а мы нашли общий множитель у числителя

и знаменателя, равный 2. Следовательно, предположение, что существует рациональное число $\frac{m}{n}$, равное $\sqrt{2}$, должно быть отвергнуто.

29. Подобно тому как это было сделано для рациональных чисел, определим понятия равенства и неравенства (больше, меньше) для вещественных чисел. Сперва будем рассматривать только числа неотрицательные (положительные и нуль):

1) два вещественных числа называются равными, если они изображаются одной и той же десятичной дробью (т. е. если у них целые части равны, а также равны их десятичные знаки, стоящие на одинаковых местах после запятой);

2) из двух неотрицательных чисел то называется больше другого, у которого целая часть больше, а при равных целых частях то считается больше, у которого первый по порядку десятичный знак будет больше, а предшествующие одинаковы.

Если первое число больше второго, то про второе говорят, что оно меньше первого.

Два неотрицательных вещественных числа могут быть соединены одним и только одним знаком $=$, $>$ или $<$; для них справедливо свойство транзитивности (равенств и неравенств). Но это уже *теоремы*, хотя в школьном курсе математики их не принято доказывать. Свойство необратимости неравенств (если $a > b$, то $b < a$) следует из сформулированных выше определений понятий «больше» и «меньше». Все иные свойства равенств и неравенств, справедливые для неотрицательных рациональных чисел, справедливы, как можно доказать, и для рассматриваемых здесь вещественных чисел.

Замечание Если два вещественных числа изображаются периодическими десятичными дробями, т е они являются рациональными числами $\frac{m}{n}$ и $\frac{m_1}{n_1}$, то равенство или неравенство этих вещественных чисел влечет за собой равенство или неравенство того же смысла для дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{m_1}{n_1}$. В этом можно убедиться с помощью правила обращения периодической дроби в простую. Таким образом, в сформулированных здесь определениях равенства и неравенства вещественных чисел содержатся как составная часть понятия равенства и неравенства рациональных чисел

Пример 17. По определению неравенств вещественных чисел периодическая дробь 0,571428571428... больше периодической дроби 0,153846153846... Показать, что соответствующие им обыкновенные дроби связаны неравенством того же смысла.

Решение. По правилу обращения периодической дроби в обыкновенную получим: $0,(571428) = \frac{571428}{999999} = \frac{4}{7}$, $0,(153846) = \frac{153846}{999999} = \frac{2}{13}$. Но $\frac{4}{7} > \frac{2}{13}$.

30. В основе определений действий над вещественными числами лежит понятие десятичного приближения. Если в бесконечной десятичной дроби, изображающей неотрицательное вещественное число, сохранить n первых десятичных знаков и откинуть все последующие, то полученная конечная десятичная дробь называется **десятичным приближением** (или **приближенным значением**) этого числа с точностью до $\frac{1}{10^n}$ **по недостатку**. Увеличив на 1 последний десятичный знак приближения числа по недостатку, получим его десятичное приближение с точностью до $\frac{1}{10^n}$ **по избытку**.

Пользуясь этим определением десятичного приближения, мы получим несколько неожиданный результат для целых чисел и для чисел, выражающихся конечными десятичными дробями. Если условиться рассматривать такие числа, как периодические дроби с периодом нуль, то найдем, например, для числа $2 = 2{,}000\ldots$, что его десятичные приближения с точностью до 1; 0,1; 0,01; ... по недостатку будут соответственно 2; 2,0; 2,00; ...

Всякое положительное вещественное число, не приводящееся к конечной десятичной дроби, больше любого своего приближения по недостатку и меньше любого своего приближения по избытку.

Любая конечная десятичная дробь, начиная с некоторого момента, будет равна своему десятичному приближению по недостатку.

Пример 18. Найти десятичные приближения числа $\frac{5}{21}$ с точностью до 0,0000001 по недостатку и по избытку.

Решение. Обратив дробь $\frac{5}{21}$ в периодическую, получим $0{,}238095238095\ldots$ Отсюда искомые приближения будут: 0,2380952 и 0,2380953, причем $0{,}2380952 < \frac{5}{21} < 0{,}2380953$.

31. Арифметические действия над неотрицательными вещественными числами определяются так.

1. Суммою двух положительных вещественных чисел (слагаемых) называется вещественное число, которое не больше всех сумм любых их приближенных значений по избытку и не меньше всех сумм любых их приближенных значений по недостатку.

Такое число всегда существует и притом единственное.

Сумма двух чисел, из которых хотя бы одно равно нулю, считается равной второму числу: $a + 0 = a$.

Действие отыскания суммы вещественных чисел по данным слагаемым называется **сложением**.

Под сложением чисел в количестве, большем чем два, понимается результат последовательного сложения этих чисел.

Сложение вещественных чисел подчиняется основным законам — переместительному и сочетательному. Это подлежит *доказательству*, но в школьном курсе не доказывается.

2. Вычитание вещественных чисел определяется так же, как и вычитание рациональных (см. п. 27).

3. Произведением двух положительных вещественных чисел (сомножителей) называется вещественное число, которое не больше всех произведений любых их приближенных значений по избытку и не меньше всех произведений любых их приближенных значений по недостатку.

Такое число всегда существует и притом единственное.

Произведение двух чисел, из которых хотя бы одно равно нулю, считается равным нулю.

Действие отыскания произведения по данным сомножителям называется умножением.

Под умножением чисел в количестве, большем чем два, понимается результат последовательного умножения этих чисел.

Умножение вещественных чисел подчиняется основным законам — переместительному, сочетательному и распределительному.

Это должно быть *доказано*, но в школьном курсе не доказывается.

4. Деление вещественных чисел определяется так же, как и деление рациональных чисел (см. п. 27).

Свойства сложения, вычитания, умножения и деления, перечисленные в пп. 19 и 20, справедливы и для вещественных чисел.

5—6. Возведение вещественного числа в степень с натуральным показателем и извлечение корня из вещественного числа определяются так же, как и соответствующие действия для рациональных чисел (см. п. 27).

32. Отрицательное вещественное число было определено в п. 28 через положительное вещественное число так же, как отрицательное рациональное — через положительное рациональное. Условимся и все другие соглашения, относящиеся к равенствам, неравенствам и арифметическим действиям, принятые ранее в связи с введением отрицательных рациональных чисел, считать распространенными на вещественные числа. Тем самым правила взаимного расположения рациональных чисел и арифметических действий над ними будут автоматически перенесены на вещественные числа.

Первые пять арифметических действий в области вещественных чисел всегда однозначно выполнимы, за исключением

деления на нуль. Последнее невозможно. *Действие извлечения корня не всегда выполнимо, а иногда выполнимо неоднозначно.* Именно 1) корень четной степени из положительного числа имеет два вещественных значения, равных по абсолютной величине и противоположных по знаку; 2) корень нечетной степени из положительного числа имеет одно значение — положительное; 3) корень нечетной степени из отрицательного числа имеет одно значение — отрицательное; 4) корень любой степени из нуля равен нулю; 5) корня четной степени из отрицательного числа не существует.

Абсолютная величина вещественного числа определяется так же, как и абсолютная величина рационального числа (п. 25).

Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа a называется неотрицательное число x, n-я степень которого равна a, т. е. $x^n = a$ или $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Например, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Для неотрицательного числа существует арифметический корень любой степени и притом единственный.

Замечание. Корень степени n из рационального числа, когда это число не является степенью n другого рационального числа, дает пример иррационального числа. Про такое число говорят, что оно *выражается через радикалы.* Не следует думать, что всякое иррациональное число может быть выражено через радикалы. Например, известное из геометрии число $\pi = 3{,}141592653$ есть иррациональное, но оно не может быть выражено через радикалы

33. Для геометрического изображения вещественных чисел пользуются осью. Возьмем произвольную прямую. Она имеет два противоположных направления. Будем одно из них считать

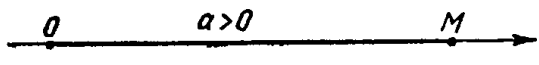

Рис. 4

положительным. Такая прямая, на которой выбрано положительное направление, называется осью. Положительное направление на оси обозначается стрелкой (рис. 4). Выберем линейную единицу для измерения длин и какую-нибудь точку O на оси. Тогда всякому вещественному числу a будет соответствовать точка M на этой оси, находящаяся от точки O на расстоянии $|a|$ с положительной стороны, если $a > 0$, и с отрицательной стороны, если $a < 0$. Точка M и является геометрическим изображением числа a. Ось, служащая для изображения чисел, называется числовой осью. Обратно, всякой точке числовой оси соответствует некоторое вещественное число. Важно заметить, что если пользоваться только рациональными

числами, то не всем точкам оси будут соответствовать числа. Например, точке, отстоящей от O на расстоянии, равном $\sqrt{2}$, не соответствовало бы числá, так как $\sqrt{2}$ есть число иррациональное.

§ 4. Комплексные числа

34. Комплексиым числом называется символ $a+bi$, где a и b — вещественные числа. Число a называют вещественной частью комплексного числа $a+bi$, а число b — мнимой частью. Прн этом символ $a+bi$ рассматривается как цельный и знак плюс, имеющийся в нем, *пока* не обозначает действия сложения, поскольку это действие еще не определено для комплексных чисел. Точно так же bi *пока* не обозначает произведения b на i. Комплексные числа $a+bi$ и a_1+b_1i называются равными: $a+bi=a_1+b_1i$, если $a=a_1$ и $b=b_1$. Если мнимая часть комплексного числа равна нулю, т. е. если оно имеет вид $a+0i$, то такое число условились считать равным вещественному числу a. В частностн, $0+0i=0$. Таким образом, *всякое вещественное число является частным случаем комплексного.* Комплексное число, у которого мнимая часть не равна нулю, называется мнимым числом. Если вещественная часть комплексного числа равна нулю, т. е. если оно имеет вид $0+bi$, то оно называется чисто мнимым и обозначается bi. Чисто мнимое число $0+1\ i=i$ называется **мнимой единицей.** Понятий «больше» и «меньше» для комплексных чисел не существует.

Комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$ называются сопряженными.

Вещественная часть a и мнимая часть b комплексного числа $\alpha=a+bi$ иногда обозначаются так: $a=R(\alpha)$, $b=I(\alpha)$ или $a=\operatorname{Re}\alpha$, $b=\operatorname{Im}\alpha$.

35. Арифметические действия над комплексиыми числами определяются так.

1. Суммою двух комплексных чисел $a+bi$ и a_1+b_1i называется комплексное число $(a+a_1)+(b+b_1)i$.

Отсюда следует, что *комплексное число $a+bi$ можно рассматривать как сумму вещественного числа a и чисто мнимого числа bi.* Действительно, $(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(0+b)i=a+bi$.

Числа, по которым отыскивается сумма, называются слагаемыми, а действие отыскания суммы по данным слагаемым — сложением.

Под сложением комплексных чисел в количестве, большем чем два, понимается результат последовательного сложения этих чисел.

Сложение комплексных чисел подчиняется основным законам — переместительному и сочетательному.

2. Вычитанием называется действие, обратное сложению, посредством которого по данной сумме (уменьшаемое) и данному слагаемому (вычитаемое) отыскивается другое слагаемое (разность).

Каковы бы ни были комплексные числа $\alpha = a + bi$ *и* $\beta = a_1 + b_1 i$, *существует и притом только одно комплексное число, являющееся разностью этих чисел.* Это число $\alpha - \beta = (a - a_1) + (b - b_1) i$.

3. Произведением двух комплексных чисел $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ называется комплексное число $aa_1 - bb_1 + (ab_1 + a_1 b) i$.

Отсюда следует, что $i^2 = -1$. Действительно, $i^2 = i \cdot i = (0 + i)(0 + i) = (0 - 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) i = -1 + 0i = -1$.

Числа, по которым отыскивается произведение, называются сомножителями, а действие отыскания произведения по данным сомножителям — умножением.

Под умножением чисел в количестве, большем чем два, понимается результат последовательного умножения этих чисел.

Умножение комплексных чисел подчиняется основным законам — переместительному, сочетательному и распределительному.

4. Делением называется действие, обратное умножению, посредством которого по данному произведению (делимое) и данному сомножителю (делитель) отыскивается другой сомножитель (частное).

Каковы бы ни были комплексные числа $\alpha = a + bi$ *и* $\beta = a_1 + b_1 i \neq 0$, *существует и притом только одно комплексное число, являющееся частным от деления числа* α *на число* β. Это число: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{aa_1 + bb_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2 + b_1^2} i$.

5—6. Возведение в степень с натуральным показателем комплексного числа и извлечение корня из комплексного числа определяются так же, как и соответствующие действия для вещественных чисел. Однако извлечение корня из комплексного числа в элементарной математике не изучается, и формула, с помощью которой можно найти корни, не выводится. Укажем лишь, что корень степени n из комплексного числа $\alpha \neq 0$ имеет n и только n различных значений. Корень любой степени из нуля равен нулю. В частности, оказывается $\sqrt{-1} = \pm i$.

На основании определения арифметических действий и основных законов легко доказать следующие правила, относящиеся к первым пяти арифметическим действиям:

1) действия над комплексными числами можно выполнять по обычным правилам действий над алгебраическими выражениями, положив затем в результате $i^2 = -1$;

2) если при выполнении действий заменить все числа им сопряженными, то и результат действий тоже заменится сопряженным ему числом.

Пример 19. Можно ли сказать, что число $10 + 5i$ больше числа $9 + 4i$?

Решение. Нет. Понятия «больше» и «меньше» не применимы к комплексным числам.

Пример 20. Упростить выражения:

$$\text{а) } i^{127}; \quad \text{б) } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{224}.$$

Решение. а) $i^{127} = i^{126} \cdot i = (i^2)^{63} i = (-1)^{63} i = -i.$

б) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{224} = \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{112} = \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{112} = i^{112} = (i^4)^{28} = 1.$

Пример 21. Упростить выражение

$$\frac{(1-\alpha+2\alpha^2)^4}{(1+5\alpha-\alpha^2)^5},$$

где

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Решение. $\alpha^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i =$

$$= -1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -1 - \alpha; \; 1 - \alpha + 2\alpha^2 = 1 - \alpha - 2 -$$

$$- 2\alpha = -(1 + 3\alpha); \; 1 + 5\alpha - \alpha^2 = 2(1 + 3\alpha).$$

Данное выражение

$$A = \frac{(1+3\alpha)^4}{32(1+3\alpha)^5} = \frac{1}{16(2+6\alpha)} = \frac{1}{16(2-3+3\sqrt{3i})} =$$

$$= \frac{1}{16(-1+3\sqrt{3i})} = \frac{-1-3\sqrt{3i}}{16(1+27)} = -\frac{1}{448} - \frac{3\sqrt{3}}{448} i.$$

Пример 22. Доказать, что если алгебраическое уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

с *вещественными* коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$ имеет комплексный корень $\alpha = a + bi$ $(b \neq 0)$, то оно имеет и сопряженный с ним корень $\bar{\alpha} = a - bi$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через $P(x)$. Число α называется корнем уравнения $P(x) = 0$, если при $x = \alpha$ уравнение обращается в тождество. Поэтому можно написать: $P(\alpha) = 0 = 0 + 0i$. Подставим в многочлен $P(x)$ значение $x = \bar{\alpha}$. Ранее было подставлено в $P(x)$ вместо x ком-

плексное число α, а теперь подставляется ему сопряженное число $\bar{\alpha}$. Выходит, что все комплексные числа α заменены сопряженными, а так как больше комплексных (мнимых) чисел в $P(\alpha)$ нет ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ — вещественные), то новый результат $P(\bar{\alpha})$ будет сопряженным с $P(\alpha)$, т. е. $P(\bar{\alpha}) = 0 - 0i = 0$. А это и означает, что $a - bi$ есть корень уравнения $P(x) = 0$.

36. Общая форма записи комплексного числа, т. е. форма $a + bi$, обычно называется алгебраической.

Если ее записать так

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

и положить

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{\rho},\ \sin\varphi = \frac{b}{\rho},$$

то получим

$$a + bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (*)$$

Последнее выражение называется тригонометрической формой комплексного числа. *Всякое комплексное число может быть представлено в тригонометрической форме.* Для числа 0 в формуле (*) следует положить $\rho = 0$, а в качестве φ можно взять любое вещественное число.

Число $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 0$ называется модулем комплексного числа $\alpha = a + bi$, а угол φ — его аргументом. По формулам $\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\rho}$ аргумент φ определяется не однозначно, а лишь с точностью до числа, кратного 2π. Обычно для φ берут значение, наименьшее по абсолютной величине, т. е. такое, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Это значение аргумента называется главным.

Модуль и аргумент комплексного числа α обозначают также следующим образом: $\rho = |\alpha|$ и $\varphi = \arg\alpha$.

Пример 23. Записать в тригонометрической форме следующие числа:

а) $m < 0$; б) ni, $n > 0$; в) $1 + \cos x + i\sin x$, $\pi < x \leqslant 2\pi$.

Для аргумента брать главное значение.

Решение.

а) $m = m + 0i$, $\rho = \sqrt{m^2 + 0^2} = \sqrt{m^2} = |m| = -m$,

$$\cos\varphi = \frac{m}{-m} = -1,\ \sin\varphi = \frac{0}{-m} = 0,\ \varphi = \pi,$$

$$m = -m(\cos\pi + i\sin\pi).$$

б) $ni = 0 + ni$, $\rho = \sqrt{0^2 + n^2} = \sqrt{n^2} = n$, $\cos\varphi = \frac{0}{n} = 0$,

$\sin\varphi = \frac{n}{n} = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $ni = n\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

в) $\rho = \sqrt{(1+\cos x)^2 + \sin^2 x} =$

$= \sqrt{1 + 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{2 + 2\cos x} =$

$= \sqrt{4\cos^2 \frac{x}{2}} = 2\left|\cos \frac{x}{2}\right| = -2\cos \frac{x}{2},$

так как

$$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} \leqslant \pi;\ \cos\varphi = \frac{1+\cos x}{-2\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{-2\cos\frac{x}{2}} = -\cos\frac{x}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin x}{-2\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-2\cos\frac{x}{2}} = -\sin\frac{x}{2}.$$

Перепишем равенства $\cos\varphi = -\cos\frac{x}{2}$ и $\sin\varphi = -\sin\frac{x}{2}$ в виде $\cos\varphi = \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$ и $\sin\varphi = \sin\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$. Следовательно, можно положить $\varphi = \frac{x}{2} - \pi$. Будет ли найденное значение главным? Иначе, будет ли φ удовлетворять неравенствам $-\pi < \varphi \leqslant \pi$? Будет. Действительно, $\pi < x \leqslant 2\pi$, $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} \leqslant \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} - \pi \leqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Итак, получили

$$1 + \cos x + i\sin x = -2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x-2\pi}{2} + i\sin\frac{x-2\pi}{2}\right).$$

37. Комплексное число $\alpha = a + bi$ вполне определяется двумя вещественными числами a и b, взятыми в определенном порядке. С другой стороны, числами a и b вполне определяется некоторая точка M (рис. 5) плоскости, абсцисса которой a и ордината b. Эту точку M (a, b) и считают геометрическим изображением числа $\alpha = a + bi$. При этом ось абсцисс называют вещественной осью, а ось ординат — мнимой.

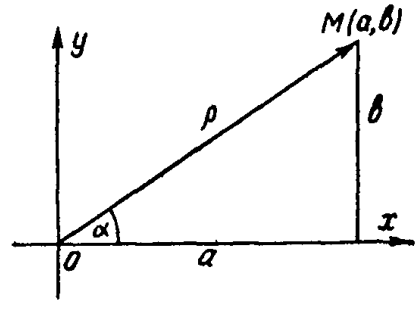

Рис 5

Комплексное число также изображают направленным отрезком OM, т. е. отрезком прямой, для которого указано, какая из ограничивающих его точек является началом и какая концом. В данном случае O есть начало, а M — конец. Такой направленный отрезок называется вектором. Вектор, имеющий началом точку O, а концом точку M, обозначается так: $\overrightarrow{OM}$. Направление вектора указывается стрелкой на его

конце. Таким образом, комплексное число $a = a + bi$ изображают вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец — с точкой M (a, b)

Длина вектора, т. е. длина отрезка OM, дает геометрическое изображение модуля числа, а угол, образованный осью абсцисс и вектором, т. е. $\angle xOM$, дает изображение аргумента. Очевидно, вещественным числам соответствуют точки, лежащие на вещественной оси, а чисто мнимым числам — на мнимой оси.

Пример 24. Где находятся точки, являющиеся изображением комплексных чисел $z = x + iy$, если:

$$\text{а) } |z| = 1; \text{ б) } |z| < 1; \text{ в) } |z| > 1?$$

Решение. а) Так как геометрическое изображение модуля комплексного числа z есть расстояние от начала координат до точки, изображающей z, то равенству $|z| = 1$ соответствуют точки окружности радиуса 1 с центром в начале координат (и только они!).

б), в) Из решения «а» ясно, что при $|z| < 1$ соответствующие точки расположатся внутри окружности радиуса 1 с центром в начале координат, а при $|z| > 1$ — вне ее.

Пример 25. Где расположены точки плоскости, соответствующие комплексным числам $z = x + iy$, для которых:

$$\text{а) } \arg z = \frac{\pi}{2}; \text{ б) } -\frac{\pi}{4} < \arg z < 0?$$

Решение. а) Так как геометрическое изображение аргумента числа z есть угол наклона вектора, изображающего число z, к вещественной оси, то точки, соответствующие равенству $\arg z = \frac{\pi}{2}$, расположатся на луче, идущем из начала координат вверх по мнимой оси.

б) Используя геометрическое изображение аргумента комплексного числа, убеждаемся, что соответствующие точки заполняют угол, вершина которого находится в начале координат, одна сторона идет по биссектрисе четвертого координатного угла, другая — по положительной части вещественной оси, точки которой также входят в это множество

Упражнения

43. Обратить в обыкновенные дроби следующие периодические: а) 0, (23), б) 0,2 (32); в) 0, (2323)

44. Доказать, что чистым периодическим дробям 0, (a_1a_2) и 0, $(a_1a_2a_1a_2)$, где a_1a_2 и $a_1a_2a_1a_2$ — периоды дробей, соответствуют равные обыкновенные дроби

45. Доказать, что чистая периодическая дробь 0, (a_1a_2) и смешанная периодическая дробь 0, $a_1(a_2a_1)$ обращаются в одну и ту же обыкновенную

46. Обыкновенная дробь со знаменателем n обращается в чистую периодическую Указать наибольшее число цифр в ее наименьшем периоде.

47. Можно ли назвать число $6i$ положительным?

48. Найти натуральное число n, если $(1+i)^n = (1-i)^n$.

Упростить выражения (49—51):

49. $(1+i\sqrt{3})^{15}$.

50. $(\alpha - \alpha^2 + 2\alpha^3)(2 - \alpha + \alpha^2)$, где $\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

51. $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{19}$, если $\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Представить в тригонометрической форме комплексное число, взяв для аргумента главное значение (52—54).

52. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

53. $\operatorname{ctg} x + i$, где $\pi < x < 2\pi$.

54. $\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

Выяснить, где находятся точки плоскости, соответствующие комплексным числам $z = x + iy$, для которых (55—58):

55. $2 < |z| < 3$.

56. $-\pi < \arg z < \pi$.

57. $I(z) = 1$

58. $R(z) > \frac{1}{2}$.

Глава III

Тождественные преобразования математических выражений

§ 1. Тождество и тождественное преобразование

38. Числа в математике обозначают цифрами и буквами Запись, в которой указано, какие действия и в каком порядке нужно произвести над данными числами, обозначенными буквами и цифрами, называется математическим или аналитическим выражением В частности, она называется алгебраическим выражением, если указаны лишь арифметические действия, т. е. сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень и извлечение корня. Эти шесть действий называются также алгебраическими действиями. Кроме алгебраических действий, в элементарной математике рассматривают еще и другие, например возведение числа в степень с иррациональным показателем, отыскание логарифма числа, отыскание синуса числа и др. Последние относятся к действиям (или операциям), которые называются неалгебраическими или трансцендентными. Если в математическом выражении указаны трансцендентные операции, то оно называется трансцендентным выражением.

Так, среди математических выражений

$$x^2+1;\quad \frac{\sqrt{2}+x}{x};\quad \frac{x^{\sqrt{2}}-x^3}{4};$$

$$x\sin x;\quad 1+\lg x;\quad \frac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+1}$$

лишь первые два являются алгебраическими, а остальные — трансцендентными.

39. Численным (числовым) значением математического выражения при данных значениях букв называется число, которое получится, если в это выражение подставить вместо букв их данные числовые значения и произвести над ними действия, указанные в выражении Те значения (числа), которые могут принимать буквы, входящие в данное математическое выражение, называются допустимыми значениями букв этого выражения. Множество всех допустимых систем значений букв некоторого математического выражения называется областью допустимых значений этого выражения или областью его определения, а про математическое выра-

жение говорят, что оно имеет смысл для этих значений букв. Заметим, что слову «множество» в математике придается такое же значение, как слову «совокупность» или слову «собрание» (чисел, фигур и т. д). Множество может быть бесконечным и конечным (в частности, пустым)

Допустимые значения букв математического выражения определяются характером действий и условиями задачи. В элементарной математике обычно считают, что *числовые значения, которые могут принимать буквы, и числовые значения математического выражения должны быть вещественными*, т. е. они рассматриваются в области вещественных чисел. Если же возможны и комплексные значения, то это специально оговаривают. Но при некоторых вещественных значениях букв делитель может обратиться в нуль, и деление станет невозможным. Следовательно, такие значения не являются допустимыми. Нельзя включить в число допустимых значений такие, при которых подкоренное число корня четной степени станет отрицательным. Более подробно обо всем этом будет сказано ниже, при рассмотрении частных видов математических выражений. Зависят допустимые значения букв и от условий задачи. Например, если буквой обозначена площадь круга, то ясно, что такими значениями будут только положительные числа, если же буквой обозначено число людей, — только натуральные числа,

40. Два математических выражения, соединенных знаком равенства, образуют равенство. Два математических выражения, соединенных знаком неравенства ($>$, $<$), образуют неравенство. Допустимыми значениями букв, входящих в равенство (или неравенство), считаются те значения, которые являются допустимыми для букв обоих математических выражений, образующих равенство (или неравенство).

Равенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв, а также справедливое числовое равенство называется тождеством Выражения, находящиеся в левой и правой частях тождества, называются тождественными, а замена математического выражения тождественным ему называется тождественным преобразованием данного выражения.

Равенство, содержащее неизвестные числа, обозначенные буквами, называется уравнением.

Два выражения могут быть тождественными в одних условиях и не быть тождественными в других. Например, если решается задача, в которой x есть угол треугольника, то равенство $\sqrt{\sin^2 x} = \sin x$ — тождество. Если же никаких ограничений на x не наложено, кроме тех, которые налагаются на него производимыми над ним операциями, то рассматриваемое равенство не будет тождеством. Действительно, правая часть равенства будет иногда положительной, а иногда отрицательной или

равной нулю, а левая будет всегда неотрицательной, потому что в элементарной математике *при выполнении тождественных преобразований корни считаются арифметическими*, если специально не оговорено противное.

Пример 26. Найти область допустимых значений следующих математических выражений:

$$\text{а) } \frac{x}{x+1}; \quad \text{б) } \sqrt{x^2-1}; \quad \text{в) } \sqrt{x+1}\log(x-1);$$

$$\text{г) } \sqrt{\sin x+\cos x-2}.$$

Решение. а) Должно быть $x+1\neq 0$. Область допустимых значений — все вещественные числа, кроме $x=-1$.

б) Должно быть $x^2-1\geqslant 0$. Это даст все вещественные числа, исключая те, для которых $|x|<1$.

в) Должно быть $x+1\geqslant 0$ и $x-1>0$. Отсюда $x\geqslant -1$ и $x>1$, т. е. вещественные числа, большие единицы.

г) Должно быть $\sin x+\cos x-2\geqslant 0$. Но

$$|\sin x+\cos x|=\left|\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right|=2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\frac{\pi}{4}\right|=$$

$$=\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right|\leqslant\sqrt{2}.$$

Следовательно, множество допустимых значений — пустое.

Пример 27. Найти те значения букв, которые не являются допустимыми для них, если выражения такие:

$$\text{а) } \frac{a^2-b^2}{a-b}; \quad \text{б) } \arcsin\frac{x^2+1}{y^2+1}.$$

Решение. а) $a-b=0$, $a=b$.

б) $\frac{x^2+1}{y^2+1}>1$, $|x|>|y|$.

Пример 28. Какова область допустимых значений математического выражения $2x\sin\frac{\pi}{n}$, где π — отношение длины окружности к длине ее диаметра? Какой станет эта область, если добавить условие, что данное выражение является стороной правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса x?

Решение. В первом случае это любые пары вещественных чисел x и n, исключая $n=0$. Во втором случае — всевозможные пары положительных чисел x и n, из которых второе — натуральное число, большее двух.

Пример 29. Найти допустимые значения букв, входящих в равенство:

$$\text{а) } \frac{x^2}{x}=x; \quad \text{б) } \sin x=\operatorname{tg}x; \quad \text{в) } \cos x=\sqrt{1-\sin^2 x};$$

$$\text{г) } \sqrt{3+x}=\sqrt{5-3x}; \quad \text{д) } \sqrt{-x^2y}=-x\sqrt{-y}.$$

Решение. а) Ограничение на x накладывается лишь левой частью равенства, где $x\neq 0$.

б) Ограничения на x накладываются лишь правой частью равенства, где $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

в) Допустимыми являются все вещественные числа. Но это равенство не есть тождество в области всех вещественных x, так как при некоторых x косинус и синус связаны другим равенством: $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$. Если рассматривать множество всех углов первого квадранта, то на этом множестве равенство $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ — тождество.

г) Так как корни считаются арифметическими, то должно быть: $3+x \geqslant 0$ и $5-3x \geqslant 0$. Из совместного рассмотрения неравенств $3+x \geqslant 0$ и $5-3x \geqslant 0$ найдем $-3 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}$. Множество всех чисел, удовлетворяющих этим соотношениям, и составляет множество допустимых значений буквы x.

д) Для правой части равенства должно выполняться неравенство $-y \geqslant 0$. Для левой должно быть $-x^2y \geqslant 0$. Отсюда следует, что $y \leqslant 0$, а x может быть любым вещественным числом. Поэтому допустимыми значениями для x будут все вещественные числа, а для y — лишь неположительные. На множестве всех неположительных чисел рассматриваемое равенство является тождеством.

§ 2. Преобразование алгебраических выражений

41. Алгебраическое выражение называется р а ц и о н а л ь н ы м, если оно составлено из чисел, выраженных буквами и цифрами, при помощи действий сложения, вычитания, умножения и деления.

Здесь может быть и возведение в степень с натуральным показателем, поскольку это действие есть частный случай умножения.

Рациональное выражение называется ц е л ы м, если оно не имеет действия деления на выражения, содержащие буквы. Если же в рациональном выражении есть такое действие, то оно называется д р о б н ы м.

Следующие выражения являются рациональными алгебраическими:

$$\frac{x+y}{x-y};\quad \frac{\frac{a}{b}-1}{a};\quad \frac{a(b+c)-a^2}{c};\quad \frac{a^3}{c};\quad \frac{a}{4}+b^2;\quad 3x^2y^3.$$

Первые четыре из них — дробные, два последних — целые.

Наиболее простым видом целого выражения является одночлен. О д н о ч л е н о м называется произведение числового множителя и одной или нескольких букв, каждая из которых взята в некоторой степени с целым неотрицательным показа-

телем. Одно число, выраженное цифрами или одной буквой, также считается одночленом. Числовой множитель одночлена называют числовым коэффициентом одночлена. Он может равняться единице и тогда явно не пишется. Но любой множитель, например в виде буквы, или несколько таких множителей можно принять за коэффициент. В этом случае коэффициент будет буквенный. Два одночлена называются равными, если у них равны коэффициенты и они составлены из одинаковых букв с соответственно равными показателями. Одночлены называются подобными, если они равны или отличаются только коэффициентами. Алгебраическая сумма нескольких одночленов называется многочленом. Одночлен рассматривается как частный случай многочлена.

Пример 30. Какие из следующих выражений являются многочленами:

$$x^2y - 3;\ a(b^2 - c) + 1;\ 4m^2y;\ 2a^2 + b - a^2;\ 1?$$

Решение. Все, кроме второго. Третье и пятое будут также и одночленами.

Для целых алгебраических выражений допустимыми значениями букв будут все вещественные числа.

Правила действий над целыми выражениями общеизвестны. Они устанавливаются на основании общих законов арифметических действий.

С помощью умножения и сложения можно доказать, что *всякое целое выражение может быть преобразовано к виду многочлена.* Если многочлен не имеет подобных членов, то он называется приведенным. Для приведенных многочленов справедлива следующая теорема: *для того чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты их членов, содержащие одни и те же буквы в одинаковых степенях, были равны.*

Рассмотрим примеры тождественных преобразований целых выражений.

Пример 31. Доказать тождество

$$(2 + xy + x + y)^2 + (2 - xy + x - y)^2 = \\ = 2(x + 2)^2 + 2y^2(x + 1)^2.$$

Решение. Положим $x + 2 = u$, $xy + y = v$. Тогда, обозначив левую часть равенства буквой A, получим

$$A = (u + v)^2 + (u - v)^2 = 2u^2 + 2v^2 = 2(x + 2)^2 + 2y^2(x + 1)^2.$$

Пример 32. Доказать тождество

$$x(y + z - x)^3 + y(z + x - y)^3 + z(x + y - z)^3 = \\ = (x + y + z)^3 - 4(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) + 4(x^3 + y^3 + z^3).$$

Решение. Обозначим левую часть равенства буквой A и положим $x+y+z=2a$. Тогда получим

$$A = x(2a-2x)^2 + y(2a-2y)^2 + z(2a-2z)^2 =$$
$$= 4[x(a^2-2ax+x^2) + y(a^2-2ay+y^2) + z(a^2-2az+z^2)] =$$
$$= 4a^2(x+y+z) - 8a(x^2+y^2+z^2) + 4(x^3+y^3+z^3).$$

Заменив здесь $2a$ суммою $x+y+z$, получим правую часть доказываемого равенства.

Пример 33. Разложить на множители

$$4x^2y^2(2x+y) + y^2z^2(z-y) - 4z^2x^2(2x+z).$$

Решение. Данное выражение

$$A = 4x^2y^2(2x+y) + z^2[y^2(z-y) - 4x^2(2x+z)] = 4x^2y^2(2x+$$
$$+y) + z^2(y^2z - y^3 - 8x^3 - 4x^2z) = 4x^2y^2(2x+y) + z^2[z(y^2-$$
$$-4x^2) - (y^3+8x^3)] = (2x+y)(4x^2y^2 + z^2y - 2xz^2 - y^2z^2 +$$
$$+2xyz^2 - 4x^2z^2) = (2x+y)[4x^2(y^2-z^2) - z^2y(y-z) + 2xz^2(y-$$
$$-z)] = (2x+y)(y-z)(4x^2y + 4x^2z - z^2y + 2xz^2) =$$
$$= (2x+y)(y-z)[y(4x^2-z^2) + 2xz(2x+z)] =$$
$$= (2x+y)(y-z)(2x+z)(2xy - yz + 2xz).$$

Пример 34. Разложить на множители

$$(a^2+a+4)^2 + 8a(a^2+a+4) + 15a^2.$$

Решение. Положим $a^2+a+4=x$. Тогда получим

$$x^2 + 8ax + 15a^2 = (x^2+3ax) + (5ax+15a^2) =$$
$$= x(x+3a) + 5a(x+3a) = (x+3a)(x+5a) =$$
$$= [(a^2+a+4)+3a][(a^2+a+4)+5a] = (a^2+4a+$$
$$+4)(a^2+6a+4) = (a+2)^2(a^2+6a+4) =$$
$$= (a+2)^2(a+3+\sqrt{5})(a+3-\sqrt{5}).$$

Пример 35. Разложить на миожители

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc.$$

Решение. $b(c+a)^2 - 2abc = b[(c+a)^2 - 2ac] = b(c^2+a^2)$. Аналогично получим

$$c(a+b)^2 - 2abc = c(a^2+b^2).$$

Данное выражение

$$A = a(b+c)^2 + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) = a(b+c)^2 +$$
$$+bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 = a(b+c)^2 + bc(b+c) + a^2(b+c) =$$
$$= (b+c)(ab+ac+bc+a^2) = (b+c)[b(c+a) + a(c+a)] =$$
$$= (b+c)(c+a)(a+b).$$

Замечание. Данное выражение симметрично относительно a, b и c, т. е от замены a на b, b на c и c на a не меняет своего вида. Такая замена букв называется круговой или циклической перестановкой Следовательно, после выделения множителя $(b+c)$ можно было предвидеть существование множителей $(c+a)$ и $(a+b)$ в разложении данного выражения.

Пример 36. Найти сумму коэффициентов многочлена, который получится, если раскрыть скобки в выражении

$$(x^{27} - 5x^2 + 10x - 5)^4 (2x-3)^3 (3x^2+4)^2.$$

Решение. В результате умножения получится многочлен степени $27 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 115$. Поэтому можно написать $(x^{27} - 5x^2 + 10x - 5)^4 (2x - 3)^3 (3x^2 + 4)^2 = a_0 x^{115} + a_1 x^{114} + \ldots + a_{115}$. Так как это тождество, то, положив в нем $x = 1$, получим $a_0 + a_1 + \ldots + a_{115} = 1^4 (-1)^3 7^2 = -49$.

Пример 37. Расположить многочлен $x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ по степеням $x + 1$.

Решение. Должно быть

$$x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = A(x+1)^3 + B(x+1)^2 + C(x+1) + D$$

или

$$x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = Ax^3 + (3A + B)x^2 + (3A + 2B + C)x + A + B + C + D.$$

Пользуясь теоремой о тождественности многочленов, получим:

$$A = 1, \quad 3A + B = 4, \quad 3A + 2B + C = 6, \quad A + B + C + D = 4.$$

Отсюда найдем, что $A = B = C = D = 1$ и $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = (x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1$.

42. Сложение, вычитание и умножение целых выражений всегда выполнимо в том смысле, что в результате этих операций мы снова получим целое выражение. Иначе обстоит вопрос с делением. Говорят, что многочлен M делится на многочлен N, если существует такой многочлен Q, что справедливо тождество

$$M = NQ.$$

Однако многочлен Q может и не существовать, и тогда деление невозможно.

Многочлены M, N и Q называются соответственно делимым, делителем и частным.

Более общим является понятие деления с остатком. Можно доказать, что для любых многочленов M и $N \not\equiv 0$ существует такая единственная пара многочленов Q и R, что справедливо тождество

$$M = NQ + R,$$

причем степень R меньше степени N или $R \equiv 0$.

Отыскание многочленов Q (неполное частное) и R (остаток) по данным многочленам M (делимое) и N (делитель) называется делением с остатком многочлена M на многочлен N.

Конечно, все сказанное о делимости многочленов относится и к любым целым алгебраическим выражениям, поскольку последние можно привести к многочленам.

Если делителем служит двучлен $x - a$, *то остаток от деления многочлена* $M(x)$ *на двучлен* $x - a$ *равен численной вели-*

чине многочлена $M(x)$ *при* $x = a$, т. е. $R = M(a)$ (теорема Безу).

Для отыскания неполного частного в этом случае можно установить простое правило. Так как при делении многочлена степени n на двучлен $x - a$ в частном получится многочлен степени $n - 1$, а в остатке не будет содержаться x, то можно написать

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \\ + b_2x^{n-3} + \ldots + b_{n-1})(x - a) + R$$

или

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = b_0x^n + (b_1 - ab_0)x^{n-1} + \\ + (b_2 - ab_1)x^{n-2} + \ldots + R - ab_{n-1}.$$

Отсюда, пользуясь тождественностью многочленов, получим:

$$b_0 = a_0;\ b_1 - ab_0 = a_1;\ b_2 - ab_1 = a_2,\ \ldots,\ b_{n-1} - ab_{n-2} = \\ = a_{n-1};\ R - b_{n-1}a = a_n.$$

Обычно вычисления выписывают в виде схемы (схема Горнера):

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + b_0a$	$b_2 = a_2 + b_1a$	$\ldots$	$b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2}a$	$R = a_n + b_{n-1}a$

Доказывают теорему Безу так: полагают частное от деления $M(x)$ на $x - a$ равным $Q(x)$, а остаток — R и пишут *тождество*

$$M(x) = (x - a)Q(x) + R. \qquad (*)$$

При $x = a$ оно дает $R = M(a)$.

Некоторых смущает в доказательстве тот факт, что при $x = a$ делитель $x - a = 0$. Может быть, нельзя в равенстве (*) полагать $x = a$? Ответ на этот вопрос дают определение деления с остатком и теорема, которая лежит в основе этого определения. Из них следует, что деление с остатком многочлена M на многочлен N *всегда возможно*, если только делитель не равен нулю *тождественно*, и это деление состоит в отыскании таких многочленов Q и R, чтобы выполнялось тождество $M = NQ + R$. И поскольку многочлены имеют смысл при любых значениях входящих в них букв, в это тождество можно подставить какое угодно число, в том числе и такое, которое обращает делитель в нуль. Можно подставить и $x = a$ в равенство (*). Однако это не значит, что мы делим многочлен на число нуль.

Пример 38. Разделить многочлен $a^2x^5 + a^4x^2 - a^3x^3 - a^5 + b^3x^3 - a^3b^2 + a^3bx^2 - b^2x^5 + a^2bx^3 - ab^2x^3$ на многочлен $bx^2 - a^2 + ax^2 - b^2$.

Решение. Принимаем букву x за главную, располагаем делимое и делитель по степеням главной буквы и делим по известному правилу деления многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{l|l}
(a^2-b^2)x^5+(-a^3+a^2b-ab^2+b^3)x^3+(a^4+a^3b)x^2+(-a^5-a^3b^2) & (a+b)x^2+(-a^2-b^2) \\
\underline{(a^2-b^2)x^5+(-a^3+a^2b-ab^2+b^3)x^3} & \overline{(a-b)x^3+a^3} \\
\quad -(a^4+a^3b)x^2+(-a^5-a^3b^2) & \\
\quad \underline{(a^4+a^3b)x^2+(-a^5-a^3b^2)} &
\end{array}$$

Пример 39. Определить a и b так, чтобы многочлен $x^4-9x^3+21x^2+ax+b$ делился на x^2-x-2.

Решение. $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. Отсюда видно, что для делимости многочлена на x^2-x-2 достаточно, чтобы он делился на $x-2$ и на $x+1$. Но по теореме Безу остаток от деления многочлена на $x-a$ равен значению этого многочлена при $x=a$. Применяя ее к двучленам $x-2$ и $x+1$, получаем $16-72+84+2a+b$ и $1+9+21-a+b$. Так как эти остатки должны быть равны нулю, то $2a+b=-28$, $-a+b=-31$, $a=1$, $b=-30$

Пример 40. Найти неполное частное и остаток от деления многочлеиа $2x^4-3x^3+3x^2-4x-5$ на $x-3$.

Решение Составляем схему Горнера:

	2	−3	3	−4	−5
3					
	2	3	12	32	91

Отсюда неполное частное равно $2x^3+3x^2+12x+32$, а остаток 91.

Пример 41. Определить a и b так, чтобы многочлен x^3+ax^2+bx-5 делился на многочлен x^2+x+1

Решение Чтобы деление было возможно, остаток должен быть равен нулю Частное же будет многочленом, старший член которого равен $\frac{x^3}{x^2}=x$. Записав частное в виде $x+c$ и воспользовавшись зависимостью между делимым, делителем и частным, получим

$$x^3+ax^2+bx-5=(x^2+x+1)(x+c)$$

или

$$x^3+ax^2+bx-5=x^3+(c+1)x^2+(c+1)x+c.$$

Отсюда, используя равенство многочленов, найдем.

$$a=c+1,\quad b=c+1,\quad -5=c.$$

Итак, $a=b=-4$.

Пример 42. Разложить на множители

$$2x^4+7x^3-2x^2-13x+6.$$

Решение. Выясним, не имеет ли данный многочлен целых корней. Известно, что целые корни многочлена с целыми коэффициентами являются делителями его свободного члена.

Свободный член имеет следующие делители: 1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6. Испытав первый из них, убеждаемся, что 1 есть корень многочлена. Но тогда по теореме Безу этот многочлен делится на $x-1$. Следовательно, можно так разбить члены многочлена на группы по два, что после вынесения из каждой группы подходящего множителя за скобку там останется $x-1$. Поэтому преобразование ведем так: $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6 = (2x^4-2x^3)+(9x^3-9x^2)+(7x^2-7x)+(-6x+6)=(x-1)\times (2x^3+9x^2+7x-6)$.

Точно так же убедимся, что многочлен $2x^3+9x^2+7x-6$ имеет корень $x=-2$ Выполняя в нем группировку по тому же принципу, получаем $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6=(x-1)\times [(2x^3+4x^2)+(5x^2+10x)+(-3x-6)]=(x-1)(x+2)(2x^2+5x-3)=(x-1)(x+2)[(2x^2+6x)+(-x-3)]=(x-1)\times (x+2)(x+3)(2x-1)$

Пример 43. Доказать, что многочлен $a^3+b^3-c^3+3abc$ делится на $a+b-c$, и найти частное от деления первого многочлена на второй.

Решение. Подставим в данный многочлен вместо a величину $c-b$. Получим $(c-b)^3+b^3-c^3+3(c-b)bc=c^3-3cb(c-b)-b^3+b^3-c^3+3cb(c-b)=0$. Поэтому на основании теоремы Безу делаем заключение, что многочлен делится на $a-(c-b)=a+b-c$.

Чтобы найти частное, можно воспользоваться правилом деления многочлена на многочлен. Мы поступим иначе. Зная, что $a+b-c$ является делителем данного многочлена, выполним разложение его на множители. Так как один из множителей есть $a+b-c$, то второй множитель и даст искомое частное: $a^3+b^3-c^3+3abc=a^3+b^3+3ab(a+b)-c^3-3ab(a+b)+3abc=(a+b)^3-c^3-3ab(a+b-c)=[(a+b)-c][(a+b)^2+(a+b)c+c^2]-3ab(a+b-c)=(a+b-c)(a^2+2ab+b^2+ac+bc+c^2-3ab)=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ac)$.

Следовательно, частное есть $a^2+b^2+c^2-ab+bc+ac$.

Пример 44. Разложить на множители

$$a(b+c)(b^2-c^2)+b(c+a)(c^2-a^2)+c(a+b)(a^2-b^2).$$

Решение. Рассматривая данное выражение как многочлен относительно a, положим в нем $a=b$. Получим $b(b+c)(b^2-c^2)+b(c+b)(c^2-b^2)+c(b+b)(b^2-b^2)=b(b+c)(b^2-c^2)-b(b+c)(b^2-c^2)=0$. Но тогда этот многочлен делится на $a-b$, а так как он симметричен относительно a, b, c (см. пример 35), то делится также на $b-c$ и $c-a$. Поэтому, обозначив данное выражение буквой M, можем написать

$$M=(a-b)(b-c)(c-a)N, \qquad (*)$$

где N — многочлен, являющийся частным от деления M на $(a-b)(b-c)(c-a)$.

Наивысшая степень, в которой входит число a в многочлен M, равна 3. Поэтому и в правой части равенства (*) степень числа a должна равняться 3. В произведение $(a-b)(b-c)(c-a)$ число a входит во второй степени, и, следовательно, в многочлен N оно может входить лишь в первой степени. Но в силу симметрии относительно a, b и c числа b и c тоже войдут в многочлен N в первых степенях, т. е. будем иметь

$$N = Aa + Bb + Cc,$$

где A, B и C — какие-то числа. Очевидно, $A = B = C$ в силу той же симметрии относительно a, b и c, и мы можем равенство (*) переписать так:

$$M = A(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c). \qquad (**)$$

Остается найти число A. Для этого положим в тождестве (**) $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$. Получим: $-6A = -6$, $A = 1$ и $M = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

43. Если целое алгебраическое выражение M делится на целое выражение N, то частное от деления M на N иногда обозначают в виде $\frac{M}{N}$ и называют отношением M к N. С другой стороны, если M не делится на N и для них возможно лишь деление с остатком, условились запись $\frac{M}{N}$ тоже называть отношением M к N.

Отношение двух целых выражений называется алгебраической или рациональной дробью.

В алгебраической дроби $\frac{M}{N}$ выражение M называется числителем дроби, а N — знаменателем.

Обыкновенные (арифметические) дроби являются частным случаем алгебраических. Они получаются из алгебраических, когда числитель и знаменатель суть целые положительные числа.

Целые алгебраические выражения, в частности многочлены, можно рассматривать как алгебраические дроби со знаменателем, равным единице.

Допустимыми значениями букв, входящих в алгебраическую дробь, являются все числа, кроме тех, которые обращают знаменатель этой дроби в нуль. Если же приходится рассматривать совместно несколько дробей, то допустимыми значениями букв будут те, которые не обращают в нуль ни один из знаменателей этих дробей.

Необходимым и достаточным условием тождественности двух алгебраических дробей $\frac{M}{N}$ *и* $\frac{P}{Q}$ *является выполнение*

тождества $MQ = NP$. Это теорема. Поэтому можно было бы дать такое определение: алгебраические дроби $\frac{M}{N}$ и $\frac{P}{Q}$ называются тождественными, если для них выполняется тождество $MQ = NP$.

Здесь важно иметь в виду, что в то время как тождество $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q}$ справедливо лишь при тех значениях входящих в дроби букв, которые *не обращают в нуль* N и Q, тождество $MQ = NP$ имеет место при *любых* значениях тех же букв.

Алгебраическая дробь называется несократимой, если ее числитель и знаменатель не имеют общих множителей. При этом нас обычно интересуют общие множители, содержащие буквы.

Для любой алгебраической дроби существует тождественная ей несократимая алгебраическая дробь.

Над алгебраическими дробями производят такие же действия, как и над арифметическими, и правила этих действий формулируются аналогично соответствующим правилам действий для арифметических дробей.

В результате сложения, вычитания, умножения и деления алгебраических дробей мы снова придем к алгебраической дроби, а в отдельных случаях — к целому алгебраическому выражению. Так как всякое рациональное выражение содержит лишь эти четыре действия, то его всегда можно представить в виде тождественной несократимой алгебраической дроби или целого алгебраического выражения. Приведение рационального выражения к виду несократимой алгебраической дроби называется его упрощением.

Пример 45. Сложить дроби

$$\frac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}.$$

Решение. Общий знаменатель этих дробей будет $Q = (x-y)(y-z)(z-x)$. Обозначив данное выражение буквой A, получим

$$A = \frac{1}{Q}[x^2(z-y) + y^2(x-z) + z^2(y-x)] =$$

$$= \frac{1}{Q}[-x^2(y-z) + xy^2 - y^2z + yz^2 - xz^2] =$$

$$= \frac{1}{Q}[-x^2(y-z) + x(y^2-z^2) - yz(y-z)] =$$

$$= \frac{y-z}{Q}(-x^2 + xy + xz - yz) = \frac{y-z}{Q}[x(z-x) - y(z-x)] =$$

$$= \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{Q} = \frac{Q}{Q} = 1.$$

Пример 46. Сложить дроби

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}+\frac{8a^7}{a^8+b^8}+\frac{16a^{15}}{a^{16}+b^{16}}.$$

Решение. Не следует пытаться приводить все дроби сразу к общему знаменателю. Это приведет к громоздкому выражению в числителе, упрощать которое будет трудно. Сложим сперва первые две дроби, затем к полученному результату прибавим третью дробь, к новому результату — четвертую и т. д. Идя этим путем, получим последовательно:

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}=\frac{2a}{a^2-b^2};\quad \frac{2a}{a^2-b^2}+\frac{2a}{a^2+b^2}=\frac{4a^3}{a^4-b^4};$$

$$\frac{4a^3}{a^4-b^4}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}=\frac{8a^7}{a^8-b^8};\quad \frac{8a^7}{a^8-b^8}+\frac{8a^7}{a^8+b^8}=\frac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}}$$

и, наконец,

$$\frac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}}+\frac{16a^{15}}{a^{16}+b^{16}}=\frac{32a^{31}}{a^{32}-b^{32}}.$$

Пример 47. Сложить дроби

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+$$
$$+\frac{1}{(a+3)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+5)}.$$

Решение. Преобразуем каждую из этих дробей так:

$$\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{(a+k+1)-(a+k)}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{1}{a+k}-\frac{1}{a+k+1}.$$

Тогда найдем, что данное выражение

$$A=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}+\frac{1}{a+3}-$$
$$-\frac{1}{a+4}+\frac{1}{a+4}-\frac{1}{a+5}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+5}=\frac{5}{a(a+5)}.$$

Пример 48. Упростить выражение

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{\frac{a}{bc}(c-b)+\frac{b}{ca}(a-c)+\frac{c}{ab}(b-a)}.$$

Решение. Обозначим данное выражение через $\frac{M}{N}$. Делимое

$$M=\frac{1}{abc}[a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)]=$$
$$=\frac{1}{abc}[a^3(c-b)+ab^3-b^3c+bc^3-ac^3]=$$
$$=\frac{1}{abc}[a^3(c-b)-a(c^3-b^3)+bc(c^2-b^2)]=$$
$$=\frac{c-b}{abc}(a^3-ac^2-abc-ab^2+bc^2+b^2c)=$$

$$= \frac{c-b}{abc}[a(a^2-c^2)+bc(c-a)+b^2(c-a)] =$$

$$= \frac{(c-b)(a-c)}{abc}(a^2+ac-bc-b^2) =$$

$$= \frac{(c-b)(a-c)}{abc}[(a^2-b^2)+c(a-b)] =$$

$$= \frac{1}{abc}(c-b)(a-c)(a-b)(a+b+c).$$

Делитель

$$N = \frac{1}{abc}[a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)].$$

Выражение в квадратных скобках преобразуется по тому же образцу, как и только что приведенное, оно уже преобразовывалось в примере 45. Взяв оттуда результат, получим

$$N = \frac{1}{abc}(c-b)(a-c)(a-b).$$

Отсюда

$$\frac{M}{N} = a+b+c.$$

Пример 49. Определить A и B так, чтобы имело место тождество

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+1)^2}.$$

Решение.

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+B(x-2)}{(x-2)(x+1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2+(2A+B)x+A-2B}{x^3-3x-2}.$$

Отсюда

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x-2} = \frac{Ax^2+(2A+B)x+A-2B}{x^3-3x-2}$$

и

$$x^2+5 = Ax^2+(2A+B)x+A-2B.$$

Пользуясь тождественностью многочленов, находим: $A=1$, $2A+B=0$, $A-2B=5$. Следовательно, $A=1$, $B=-2$. При этих значениях A и B последнее равенство $(A-2B=5)$ тоже справедливо.

Пример 50. Доказать равенство

$$\left(q^2\frac{n-p}{p-q}+n^2\frac{m-q}{m-n}\right):\left(p^2\frac{m-q}{p-q}+m^2\frac{n-p}{m-n}\right) = \frac{n-q}{m-p}.$$

Решение. Обозначим делимое левой части буквой M, а делитель буквой N. Будем иметь:

$$M = \frac{1}{(p-q)(m-n)}[q^2(n-p)(m-n)+n^2(m-q)(p-q)] =$$

$$= \frac{1}{A}(q^2nm - q^2n^2 - q^2pm + q^2pn + n^2mp - n^2mq - n^2qp + n^2q^2) =$$

$$= \frac{1}{A}[-qmn(n-q) + mp(n^2-q^2) - qpn(n-q)] =$$

$$= \frac{1}{A}(n-q)(-qmn + mpn + mpq - qpn) = \frac{1}{A}(n-q)B;$$

$$N = \frac{1}{(p-q)(m-n)}[p^2(m-q)(m-n) + m^2(n-p)(p-q)] =$$

$$= \frac{1}{A}(p^2m^2 - p^2mn - p^2qm + p^2qn + m^2np - m^2nq - m^2p^2 +$$

$$+ m^2pq) = \frac{1}{A}[mnp(m-p) + mpq(m-p) - nq(m^2-p^2)] =$$

$$= \frac{1}{A}(m-p)(mnp + mpq - nqm - nqp) = \frac{1}{A}(m-p)B.$$

Отсюда

$$M : N = \frac{n-q}{m-p}.$$

Пример 51. Доказать равенство

$$\frac{x}{a^3-1} - \frac{a}{x^3-1} = \frac{2(a-x)}{a^2x^2+3},$$

если $x + a = 1$.

Решение. Так как $x + a = 1$, $x = 1 - a$ и $a = 1 - x$, то можем написать

$$\frac{x}{a^3-1} - \frac{a}{x^3-1} = \frac{1-a}{a^3-1} - \frac{1-x}{x^3-1} = \frac{-1}{a^2+a+1} + \frac{1}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{-x^2-x-1+a^2+a+1}{(a^2+a+1)(x^2+x+1)} = \frac{(a^2-x^2)+(a-x)}{A} =$$

$$= \frac{(a-x)(a+x+1)}{A} = \frac{2(a-x)}{A},$$

где знаменатель

$$A = (a^2+a+1)(x^2+x+1) = a^2x^2 + a^2x + a^2 + ax^2 +$$
$$+ ax + a + x^2 + x + 1 = a^2x^2 + ax(a+x) + x(a+x) +$$
$$+ (a+x) + a^2 + 1 = a^2x^2 + ax + x + 1 + a^2 + 1 = a^2x^2 +$$
$$+ a(x+a) + x + 2 = a^2x^2 + a + x + 2 =$$
$$= a^2x^2 + 1 + 2 = a^2x^2 + 3.$$

Итак,

$$\frac{x}{a^3-1} - \frac{a}{x^3-1} = \frac{2(a-x)}{A} = \frac{2(a-x)}{a^2x^2+3}.$$

Пример 52. Доказать равенство

$$\left(\frac{a-b}{c^2} + \frac{b-c}{a^2} + \frac{c-a}{b^2}\right)\left(\frac{c^2}{a-b} + \frac{a^2}{b-c} + \frac{b^2}{c-a}\right) =$$

$$= 4abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^3,$$

если $a + b + a = 0$.

Решение. Рассмотрим произведение первого множителя на первое слагаемое второго:

$$\left(\frac{a-b}{c^2}+\frac{b-c}{a^2}+\frac{c-a}{b^2}\right)\frac{c^2}{a-b}=1+\frac{c^2}{a-b}\left(\frac{b-c}{a^2}+\frac{c-a}{b^2}\right)=$$

$$=1+\frac{c^2}{a-b}\cdot\frac{b^3-b^2c+a^2c-a^3}{a^2b^2}=1+\frac{c^2}{a-b}\cdot\frac{(b^3-a^3)+c(a^2-b^2)}{a^2b^2}=$$

$$=1+\frac{c^2}{a-b}\cdot\frac{(a-b)[c(a+b)-(b^2+ab+a^2)]}{a^2b^2}=$$

$$=1+\frac{c^2}{a^2b^2}[c(a+b)-(a^2+ab+b^2)].$$

Но $a+b=-c$, и для этого произведения получим

$$1+\frac{c^2}{a^2b^2}(-c^2-a^2-b^2-ab)=1-\frac{c^2(a^2+b^2+c^2+ab)}{a^2b^2}=$$

$$=1-\frac{c^4(a^2+b^2+c^2+ab)}{a^2b^2c^2}=1-c^4\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}-\frac{c^4ab}{a^2b^2c^2}=$$

$$=1-c^4\cdot\frac{A}{B^2}-\frac{c^3}{B},$$

где $a^2+b^2+c^2=A$, $abc=B$.

Так как левая часть доказываемого равенства (как и правая) симметрична относительно a, b и c (см. пример 35), то, применяя круговую перестановку, найдем произведение первого множителя на второе слагаемое второго:

$$1-a^4\cdot\frac{A}{B^2}-\frac{a^3}{B}$$

и на третье:

$$1-b^4\cdot\frac{A}{B^2}-\frac{b^3}{B}.$$

Складывая найденные произведения и обозначая их сумму буквой M, получаем

$$M=1-c^4\cdot\frac{A}{B^2}-\frac{c^3}{B}+1-a^4\cdot\frac{A}{B^2}-\frac{a^3}{B}+1-b^4\cdot\frac{A}{B^2}-\frac{b^3}{B}=$$

$$=3-\frac{A}{B^2}(a^4+b^4+c^4)-\frac{1}{B}(a^3+b^3+c^3). \qquad (*)$$

Пользуясь соотношением $a+b+c=0$ и правилом возведения многочлена в квадрат, находим:

$$A=a^2+b^2+c^2=a(-b-c)+b(-c-a)+c(-a-b)=$$
$$=-2(ab+bc+ca);\ a^3+b^3+c^3=(-b-c)^3+b^3+c^3=$$
$$=-b^3-c^3-3bc(b+c)+b^3+c^2=-3bc(b+c)=$$
$$=-3bc(-a)=3abc;\ a^4+b^4+c^4=(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+$$
$$+2b^2c^2+2c^2a^2)-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=(a^2+b^2+c^2)^2-$$
$$-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=A^2-2[(ab+bc+ca)^2-2ab^2c-$$
$$-2bc^2a-2ca^2b]=A^2-2(ab+bc+ca)^2+4abc(b+c+a)=$$
$$=4(ab+bc+ca)^2-2(ab+bc+ac)^2=2(ab+bc+ca)^2.$$

Подставляя найденные значения сумм $a^m + b^m + c^m$, где $m = 2, 3, 4$ в равенство (*), получаем

$$M = 3 + \frac{4(ab+bc+ca)^3}{a^2b^2c^2} - \frac{3abc}{abc} = 3 + 4abc\,\frac{(ab+bc+ca)^3}{a^3b^3c^3} - 3 =$$

$$= 4abc\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)^3 = 4abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3.$$

Пример 53. Доказать равенство

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{c_1a_1^n + c_2a_2^n + \ldots + c_ka_k^n}{c_1b_1^n + c_2b_2^n + \ldots + c_kb_k^n},$$

если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_k}{b_k}$, n — натуральное число, а $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — любые числа, не равные нулю одновременно.

Решение. Из данной пропорции получаем

$$\frac{c_1a_1^n}{c_1b_1^n} = \frac{c_2a_2^n}{c_2b_2^n} = \ldots = \frac{c_ka_k^n}{c_kb_k^n}.$$

Отсюда, пользуясь свойством ряда равных отношений, найдем

$$\frac{c_1a_1^n + c_2a_2^n + \ldots + c_ka_k^n}{c_1b_1^n + c_2b_2^n + \ldots + c_kb_k^n} = \frac{c_1a_1^n}{c_1b_1^n} = \frac{a_1^n}{b_1^n} = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n.$$

Поскольку мы умножали числители и знаменатели дробей на числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$, то тем самым предполагали, что ни одно из этих чисел не равно нулю. Справедливость полученного равенства для случая, когда некоторые из этих чисел равны нулю, устанавливается также, но при этом используются лишь те из них, которые не равны нулю.

44. При выполнении преобразований над рациональными выражениями часто пользуются отрицательной степенью числа. Напомним, что определение нулевой и отрицательной степени числа $a \neq 0$ дается с помощью равенств: $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Известные правила действия со степенями, ранее доказанные для натуральных показателей, могут быть теперь обобщены на любые целые степени. Так, формулы

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},\quad a^m : a^n = a^{m-n},\quad (a^m)^n = a^{mn},\quad (ab)^m = a^mb^m,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

верны для любых целых m и n при допустимых значениях a и b. Формула $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ также верна при любом целом n и $a \neq 0$, но при $n > 0$ — это определение, а при $n \leqslant 0$ — теорема.

Заметим, что если a — комплексное число, то и для него определение нулевой и целой отрицательной степени дается с помощью тех же формул $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где $a \neq 0$.

Пример 54. Упростить выражение

$$\frac{x^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}-b(ax)^{-1}},$$

если

$$x=\frac{1}{(a+b)^{-1}}-\left(\frac{a+b}{a^2+b^2}\right)^{-1}.$$

Решение. Умножим числитель и знаменатель на ax. Тогда выражение примет вид $\frac{a-x}{x-b}$. С другой стороны,

$$x=a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b},\quad x(a+b)=(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab.$$

Поэтому данное выражение

$$A=\frac{a-x}{x-b}=\frac{(a+b)(a-x)}{(a+b)(x-b)}=\frac{a(a+b)-x(a+b)}{(a+b)x-b(a+b)}=$$

$$=\frac{a(a+b)-2ab}{2ab-b(a+b)}=\frac{a(a-b)}{b(a-b)}=\frac{a}{b}.$$

45. Алгебраическое выражение называется иррациональным, если оно содержит действие извлечения корня из чисел, выраженных буквами или цифрами.

Как и в случае целых или дробных алгебраических выражений, выделение иррациональных выражений из класса алгебраических производится исключительно по их *внешнему виду*. Так, выражение $\sqrt{x^4+1}$ называют иррациональным, хотя оно и приводится к рациональному выражению x^2+1.

Если действие извлечения корня производится над числами, выраженными лишь некоторыми буквами из числа входящих в данное выражение, то выражение называют иррациональным относительно этих букв.

Так, выражение $\sqrt{a}+\sqrt{b}+c$ иррационально относительно букв a и b, в то время как выражение $a\sqrt{2}+b$ рационально относительно тех же букв.

Алгебраическое выражение, в которое входят знаки извлечения корня (радикалы), называется выражением, содержащим радикалы.

Для *арифметических корней* (см. п. 32) справедливы следующие теоремы.

1) извлечение корня из произведения: $\sqrt[m]{ab}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$;

2) извлечение корня из дроби: $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$;

3) сокращение показателя степени и показателя корня: $\sqrt[mn]{a^n}=\sqrt[m]{a}$;

4) возведение корня в степень: $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$;

5) извлечение корня из корня: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

6) вынесение множителя из-под знака корня: $\sqrt[m]{a^m b} = a\sqrt[m]{b}$ при $a > 0$ и любом m.

Если m четное и $a < 0$, то формула имеет такой вид: $\sqrt[m]{a^m b} = -a\sqrt[m]{b}$;

7) введение множителя под знак корня: $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$ при $a > 0$ и любом m. Если $a < 0$ и m четное, то $a\sqrt[m]{b} = -\sqrt[m]{a^m b}$.

Для доказательства любой из этих теорем достаточно показать, что при возведении в степень обеих частей рассматриваемого равенства получится одинаковый результат. Справедливость такого метода доказательства следует из теоремы «если $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$ и $A^m = B^m$, то $A = B$» (см. п. 12, примеры 4 и 5). При этом приходится пользоваться равенством

$$\left(\sqrt[m]{A}\right)^m = A.$$

О нем неоднократно говорилось выше, однако ввиду исключительной важности его еще раз подчеркиваем: это равенство пишется на основании *определения корня*.

Следует иметь в виду, что перечисленные только что теоремы для корней, не являющихся арифметическими, не во всех случаях справедливы.

На этих теоремах и на общих законах арифметических действий основаны те тождественные преобразования выражений, содержащих радикалы, которые рассматриваются в школьном курсе элементарной математики. При этом корни четной степени всегда считаются *арифметическими*, а за значение корня нечетной степени из вещественного числа принимается его единственное вещественное значение. Исходя из этих соглашений, определяются допустимые значения букв иррациональных выражений.

Если показатель корня нечетный, то теоремы 1, 2, 4, 6 и 7 справедливы и в том случае, когда все или некоторые подкоренные выражения отрицательные. Теоремы 3 и 5 имеют место лишь при дополнительном условии, что n — число нечетное. Так, если $n = 2$, $m = 3$ и $a = -8$, то левая часть равенства теоремы 3 даст $\sqrt[6]{64} = 2$, а правая — $\sqrt[3]{-8} = -2$. Что касается равенства в теореме 5, то обе его части при тех же числовых значениях букв не имеют смысла.

При преобразованиях иногда бывает полезна формула, которая называется формулой сложного радикала:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Здесь также корни считаются арифметическими и, следовательно, $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $A^2 \geqslant B$. Из двух знаков $\pm$, имеющихся в обеих частях формулы, выбирают одновременно или только верхние (+), или только нижние (—).

Очень часто при выполнении преобразований приходится встречаться с выражениями $\sqrt{x^2}$, $\sqrt[n]{x^n}$. Следует помнить, что арифметические значения этих корней записываются так:

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt[n]{x^n} = |x|.$$

Пример 55. Упростить, а затем найти численную величину выражения

$$a + \sqrt{a^2 \frac{(1+b^2)^2 - 4b^2}{(b^2+1)^2}},$$

если $a = -2$, $b = 2$.

Решение. Данное выражение

$$A = a + \sqrt{\frac{a^2}{(b^2+1)^2}} \sqrt{1 + 2b^2 + b^4 - 4b^2} =$$

$$= a - \frac{a}{b^2+1} \sqrt{(1-b^2)^2} = a\left(1 - \frac{b^2-1}{b^2+1}\right) =$$

$$= a \cdot \frac{b^2+1-b^2+1}{b^2+1} = \frac{2a}{b^2+1}.$$

Так как $a < 0$ и $b > 1$, то арифметический $\sqrt{a^2} = -a$, а $\sqrt{(1-b^2)^2} = b^2 - 1$, что и было учтено в преобразованиях.

Полагая $a = -2$ и $b = 2$, получаем окончательно

$$A = \frac{2 \cdot (-2)}{2^2+1} = -\frac{4}{5}.$$

Пример 56. Какое из двух чисел больше: $2\sqrt{5} + \sqrt{21}$ или 9?

Решение. Если числа x и y неотрицательные и $x = y$, или $x > y$, или $x < y$, то при натуральном n будет соответственно $x^n = y^n$, $x^n > y^n$, $x^n < y^n$ (см. п. 12, пример 4). Это кратко записывают так: если $x \vee y$, то $x^n \vee y^n$. Символ $\vee$, поставленный между x и y, означает, что x и y соединены одним из следующих знаков: $=$, $>$, $<$ (могло бы быть $\geqslant$, $\leqslant$), а вся запись говорит, что, каким знаком соединены x и y, таким же нужно соединить и x^n с y^n. Итак, если $2\sqrt{5} + \sqrt{21} \vee 9$, то $(2\sqrt{5} + \sqrt{21})^2 \vee 9^2$; $20 + 4\sqrt{5}\sqrt{21} + 21 \vee 81$; $\sqrt{5}\sqrt{21} \vee 10$. Повторяя эту операцию, получим $(\sqrt{5}\sqrt{21})^2 \vee 10^2$; $5 \cdot 21 \vee 100$; $105 > 100$. Следовательно, $2\sqrt{5} + \sqrt{21} > 9$.

Пример 57. Вычислить

$$9\sqrt{2+\sqrt{5}}\sqrt[6]{17\sqrt{5}-38}\left(\sqrt[3]{2\sqrt{54}} - \sqrt[3]{3\sqrt{\frac{3}{8}}}\right)^{-4} -$$

$$-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\sqrt[3]{40\sqrt{2}+56} : \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}.$$

Решение.

$$9\sqrt[6]{(2+\sqrt{5})^3(17\sqrt{5}-38)}\left(\sqrt[6]{8\cdot 27}-\sqrt[6]{9\cdot\frac{3}{8}}\right)^{-4}-$$
$$-\sqrt[6]{(3-2\sqrt{2})^3}\cdot 2\sqrt[6]{(5\sqrt{2}+7)^2}:\sqrt[3]{8}=$$
$$=9\sqrt[6]{(17\sqrt{5}+38)(17\sqrt{5}-38)}\left(\sqrt{6}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{-4}-$$
$$-2\sqrt[6]{(99-70\sqrt{2})(99+70\sqrt{2})}:2=$$
$$=9\sqrt[6]{(17\sqrt{5})^2-38^2}\left(\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^{-4}-\sqrt[6]{99^2-(70\sqrt{2})^2}=$$
$$=9\sqrt[6]{1445-1444}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^{-4}-\sqrt[6]{9801-9800}=$$
$$=9\cdot 1\cdot\frac{2^4}{6^2}-1=4-1=3.$$

Пример 58. Упростить выражение

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Решение. Упростим первое слагаемое:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2})}{(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2})(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2})}=$$
$$=\frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})^3}-\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}-2}=\frac{\sqrt{26+15\sqrt{3}}-\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$

Преобразуя $\sqrt{26+15\sqrt{3}}$ по формуле сложного радикала, получим

$$\sqrt{26+15\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{27}{2}}+\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{6}+\frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

Таким образом, первое слагаемое данного выражения примет следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}+\frac{5}{2}\sqrt{2}-2\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{3}\right).$$

Аналогично поступая со вторым слагаемым, найдем, что оно равно

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}-\frac{5}{2}\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{3}\right).$$

Складывая эти два результата, получим для данного выражения

$$A=\frac{1}{\sqrt{3}}(3\sqrt{6}-2\sqrt{2}\sqrt{3})=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

Пример 59. Упростить выражение

$$\left(\frac{1+x\sqrt[3]{x}+x+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^{-2}}}\right)\cdot\frac{\frac{1+x}{\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^{-1}}+\sqrt[3]{x}}.$$

Решение. Иногда учащиеся спешат приводить дроби к общему знаменателю. Такой порядок нередко лишь усложняет задачу упрощения выражения. Для выражений, подобных данному, обычно приходится начинать преобразования с возможных сокращений дробей. Именно с этого мы и начнем, попутно переводя отрицательные степени в положительные. Обозначая данное выражение буквой A, получим

$$A=\left[\frac{(1+x)(1+\sqrt[3]{x})}{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x})}+\sqrt[3]{x^2}\right]\cdot\frac{\frac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt[3]{x^2}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\left(\frac{1+x}{1-\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{x^2}\right)\cdot\frac{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[3]{x}=$$

$$=\frac{1+x+\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x})}{1-\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[3]{x}=$$

$$=\frac{1+x+\sqrt[3]{x^2}-x}{1+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}.$$

Пример 60. Найти численную величину выражения

$$x^3-6x,$$

если

$$x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

Решение. Для вычисления x^3 воспользуемся формулой

$$(m+n)^3=m^3+3mn(m+n)+n^3.$$

Тогда найдем, что данное выражение

$$A=\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^3+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\,x+$$

$$+\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3-6x=20+14\sqrt{2}+3\cdot 2x+$$

$$+20-14\sqrt{2}-6x=40.$$

Пример 61. Найти численную величину выражения

$$2x^3+2x^2+1,$$

если

$$x=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}}+\sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}-1\right).$$

Решение. Из данного равенства найдем

$$3x+1=\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}}+\sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}.$$

Возведем полученное равенство в куб. Пользуясь формулой

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3,$$

получаем

$$(3x+1)^3 = \left(\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}}\right)^3 + 3\sqrt[3]{\frac{23^2-513}{16}}(3x+1) +$$

$$+\left(\sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}\right)^3 = \frac{23+\sqrt{513}}{4} + 3\sqrt[3]{\frac{529-513}{16}}(3x+1) +$$

$$+\frac{23-\sqrt{513}}{4} = \frac{23}{2} + 3\cdot 1\,(3x+1).$$

Итак,

$$(3x+1)^3 = \frac{23}{2} + 3(3x+1),\ 27x^3+27x^2+9x+1 =$$

$$= \frac{23}{2} + 9x + 3,\quad 27x^3+27x^2 = \frac{27}{2},\quad x^3+x^2 = \frac{1}{2},$$

$$2x^3+2x^2 = 1,\quad 2x^3+2x^2+1 = 2.$$

Пример 62. Доказать справедливость равенства

$$\left(\frac{2x^2+3+x\sqrt{4x^2+3}}{2x^2+1+x\sqrt{4x^2+3}}\right)^{-0,5} = \frac{x+\sqrt{4x^2+3}}{3\sqrt{x^2+1}}.$$

Решение. Обозначим левую часть равенства буквой A. Будем иметь

$$A = \left[\frac{(2x^2+3+x\sqrt{4x^2+3})-2}{2x^2+3+x\sqrt{4x^2+3}}\right]^{0,5} =$$

$$= \left(1-\frac{2}{2x^2+3+x\sqrt{4x^2+3}}\right)^{0,5} =$$

$$= \left[1-\frac{2(2x^2+3-x\sqrt{4x^2+3})}{(2x^2+3)^2-(x\sqrt{4x^2+3})^2}\right]^{0,5} =$$

$$= \left[1-\frac{2(2x^2+3-x\sqrt{4x^2+3})}{9x^2+9}\right]^{0,5} =$$

$$= \left[\frac{9x^2+9-4x^2-6+2x\sqrt{4x^2+3}}{9(x^2+1)}\right]^{0,5} =$$

$$= \left[\frac{5x^2+3+2x\sqrt{4x^2+3}}{9(x^2+1)}\right]^{0,5} = \left[\frac{x^2+2x\sqrt{4x^2+3}+4x^2+3}{9(x^2+1)}\right]^{0,5} =$$

$$= \left[\frac{(x+\sqrt{4x^2+3})^2}{9(1+x^2)}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{x+\sqrt{4x^2+3}}{3\sqrt{1+x^2}}.$$

Пример 63. Вычислить выражение

$$\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}},$$

если $x = 2ab(b^2+1)^{-1}$ и $a > 0$, $b < -1$.

Решение. Так как корни, входящие в данное выражение должны быть арифметическими, то подкоренные выражения могут быть лишь неотрицательными. Покажем, что это имеет место. По условию $a>0$ и $ab<0$. Следовательно, $x<0$ и $a-x>0$. Величина $a+x$ тоже больше нуля, потому что

$$|x|=\frac{2a|b|}{b^2+1}<a,$$

так как

$$\frac{2|b|}{b^2+1}=\frac{2|b|}{(|b|-1)^2+2|b|}<\frac{2|b|}{2|b|}=1.$$

Обозначим данное выражение буквой A. Получим

$$A=\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})^2}{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2}=\frac{a+x-2\sqrt{a^2-x^2}+a-x}{(a+x)-(a-x)}=$$

$$=\frac{2a-2\sqrt{a^2-x^2}}{2x}=\frac{a}{x}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\frac{a}{x}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{-\sqrt{x^2}}=$$

$$=\frac{a}{x}+\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2}}=\frac{a}{x}+\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2-1}.$$

Здесь, подводя x под знак корня, мы учли, что $\sqrt{x^2}$ арифметический и $x<0$, и поэтому написали, что $x=-\sqrt{x^2}$. Заметив теперь, что $\frac{a}{x}=\frac{b^2+1}{2b}$, находим

$$A=\frac{b^2+1}{2b}+\sqrt{\left(\frac{b^2+1}{2b}\right)^2-1}=\frac{b^2+1}{2b}+\sqrt{\frac{(b^2+1)^2-4b^2}{4b^2}}=$$

$$=\frac{b^2+1}{2b}+\sqrt{\frac{(b^2-1)^2}{4b^2}}=\frac{b^2+1}{2b}+\sqrt{\left(\frac{b^2-1}{2b}\right)^2}.$$

Но по условию $b<0$ и $|b|>1$. Следовательно, $b^2>1$,

$$b^2-1>0,\ \frac{b^2-1}{2b}<0,\ \sqrt{\left(\frac{b^2-1}{2b}\right)^2}=\frac{1-b^2}{2b}$$

и

$$A=\frac{b^2+1}{2b}+\frac{1-b^2}{2b}=\frac{2}{2b}=\frac{1}{b}.$$

46 Если p и q — натуральные числа, $q>1$ и $a>0$, то дробной степенью числа a с показателем $\frac{p}{q}$, обозначаемой $a^{\frac{p}{q}}$, называется $\sqrt[q]{a^p}$. Таким образом, *по определению* $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$. Дробная степень $a^{\frac{p}{q}}$ является лишь *другой формой записи* $\sqrt[q]{a^p}$, но не делает выражение рациональным, если оно не приводилось к таковому. Рассматривают также и отрицательную

дробную степень, которая для $a > 0$ определяется так: $a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$. С помощью этих определений и ранее устаиовленных теорем можно доказать, что теоремы

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ a^m : a^n = a^{m-n};\ (a^m)^n = a^{mn};$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}\ (m > 1);\ (ab)^m = a^m b^m;\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},\ a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

верны для любых рациональных m и n при допустимых значениях a и b.

Важно помнить, что *определение дробной степени не распространяется на отрицательное основание.* В формуле $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ основание $a \geqslant 0$, а если $p \leqslant 0$, то $a > 0$

Замечание. Можно было бы рассматривать дробную степень $a^{\frac{p}{q}}$ и прн $a < 0$. Но тогда пришлось бы мириться с тем фактом, что некоторые привычные для нас правила действий со степенями были бы неверны [например, $(-2)^{\frac{1}{3}} \neq (-2)^{\frac{2}{6}}$], или же ограничиться рассмотреннем лишь несократимых дробей $\frac{p}{q}$ с нечетным знаменателем q.

Пример 64. Упростить выражение

$$x\sqrt[n]{1 + \sqrt[n+1]{a^n x^{-n}}} + a\sqrt[n]{1 + \sqrt[n+1]{x^n a^{-n}}},$$

если $x = \left(b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$.

Решение. Преобразуем первое слагаемое:

$$x\sqrt[n]{1 + \sqrt[n+1]{a^n x^{-n}}} = x\left(1 + a^{\frac{n}{n+1}} x^{-\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= x\left[x^{-\frac{n}{n+1}}\left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = x \cdot x^{-\frac{1}{n+1}}\left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= x^{\frac{n}{n+1}}\left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Второе слагаемое получается из первого, если в первом буквы x и a заменить соответственно буквами a и x. Поэтому второе слагаемое после аналогичных преобразований приводится к такому:

$$a^{\frac{n}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}} + x^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Суммируя эти два результата и вынося за скобку общий множитель, найдем для данного выражения

$$A=\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)=\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}.$$

Но

$$x=\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}} \text{ и } x^{\frac{n}{n+1}}=b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}},$$

поэтому

$$A=\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}=\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{a}}=$$

$$=\left(b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{a}}=b.$$

Пример 65. Упростить выражение

$$\left[\frac{\left(\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b}}-\sqrt[3]{ab}\sqrt{a}\right)^2}{(ab)^{\frac{7}{6}}}+4\right]:\frac{ab^{\frac{1}{2}}+ba^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Решение. Данное выражение

$$A=\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}\right)^2}{(ab)^{\frac{7}{6}}}+4\right]:\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$$

$$=\left[\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}\right)^2}{(ab)^{\frac{2}{3}}\sqrt{ab}}+4\right]:\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$$

$$=\left[\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{\sqrt{ab}}+4\right]:\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{b-2\sqrt{ab}+a+4\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{ab(\sqrt{b}+\sqrt{a})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{ab}=\frac{a-b}{ab}.$$

§ 3. Преобразование показательных и логарифмических выражений

47. Для введения понятия логарифма числа требуется обобщить понятие степени на случай иррационального показателя. Пусть $a>1$ и x — положительное иррациональное число. Иррациональной степенью a^x называется вещественное число, которое больше всякой степени a^{x_1}, где x_1 — любое рациональное приближение числа x по недостатку, и меньше всякой степени a^{x_2}, где x_2 — любое приближение x по избытку, т. е.

$$a^{x_1} < a^x < a^{x_2} \qquad (x > 0).$$

Такое число a^x *существует и притом единственное.*

Если $0 < a < 1$, то под иррациональной степенью a^x понимается число, удовлетворяющее неравенствам

$$a^{x_2} < a^x < a^{x_1} \qquad (x > 0).$$

Если $a > 0$ и $x < 0$, то по определению полагают

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}.$$

При $a = 1$ считают $a^x = 1$.

Иррациональные степени отрицательного основания в элементарной математике не рассматриваются.

Введением понятия иррациональной степени завершается вопрос об определении степени вещественного числа с вещественным показателем.

Замечание. Можно доказать, что степень a^x положительного числа a с иррациональным показателем x есть предел последовательности (см. п 81) степеней a^{x_n} этого числа с рациональными показателями x_n, когда последовательность показателей x_n стремится к x, т. е.

$$a^x = \lim_{x_n \to x} a^{x_n}.$$

Это же верно и для рационального показателя x.

Пользуясь определением иррациональной степени и ранее доказанными теоремами, можно доказать, что теоремы

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad a^x : a^y = a^{x-y}; \quad (a^x)^y = a^{xy};$$

$$\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}; \quad (ab)^x = a^x b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

справедливы при любых вещественных x и y и допустимых значениях a и b. Впрочем, в равенстве $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$ принято считать y натуральным, большим единицы, хотя и можно было бы распространить понятие $\sqrt[y]{a^x}$ на все $y \neq 0$.

Для положительного основания a справедливы также следующие утверждения:

1) если $a>1$, то $a^x>1$, когда $x>0$*, и $a^x<1$, когда $x<0$;

2) если $0<a<1$, то $a^x<1$, когда $x>0$, и $a^x>1$, когда $x<0$.

Если в математическом выражении a^x основание a фиксировано, а показатель x может принимать различные допустимые значения, то выражение называют показательным.

Например, выражения 2^x, 3^{-x} показательные.

Если в выражении a^x показатель x фиксирован, а основание a принимает различные допустимые значения, то такое выражение называют степенным.

Так, выражения a^3, x^{-2}, $b^{\frac{2}{3}}$ степенные.

Пример 66. Доказать равенство

$$\sqrt{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{4}(2^x-2^{-x})^2}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}(2^x-2^{-x})^2}+1}}=\frac{1-2^x}{1+2^x},$$

если $x<0$.

Решение.

$$\sqrt{1+\frac{1}{4}(2^x-2^{-x})^2}-1=\frac{1}{2}\sqrt{4+(2^x-2^{-x})^2}-1=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+2^{2x}-2+2^{-2x}}-1=\frac{1}{2}\sqrt{(2^x+2^{-x})^2}-1=$$

$$=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})-1=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x}-2)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2-2\cdot 2^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{-\frac{x}{2}}+\left(2^{-\frac{x}{2}}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Аналогично получим

$$\sqrt{1+\frac{1}{4}(2^x-2^{-x})^2}+1=\frac{1}{2}\left(2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Поэтому для левой части A доказываемого равенства найдем

$$A=\sqrt{\frac{\left(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}\right)^2}}=\frac{\left|2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right|}{2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}}.$$

---

* См. пример 239.

Так как $x<0$, то $2^{\frac{x}{2}}<2^{-\frac{x}{2}}$ и $\left|2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right|=2^{-\frac{x}{2}}-2^{\frac{x}{2}}$. Отсюда

$$A=\frac{2^{-\frac{x}{2}}-2^{\frac{x}{2}}}{2^{-\frac{x}{2}}+2^{\frac{x}{2}}}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $2^{\frac{x}{2}}$, получим

$$A=\frac{1-2^{x}}{1+2^{x}}.$$

48. Логарифмом числа N по основанию a называется показатель степени x, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число N.

Тот факт, что x есть логарифм числа N по основанию a, записывается так:

$$x=\log_a N.$$

По определению логарифма $a^x=N$ или

$$a^{\log_a N}=N$$

Основание a считается положительным, но не равным единице.

Сформулируем важнейшие теоремы, относящиеся к логарифмам, предполагая основание $a>0$ и $a\neq 1$:*

1) всякое положительное число имеет единственный логарифм по любому данному основанию;

2) число нуль и отрицательные числа не имеют логарифмов,

3) логарифм единицы равен нулю;

4) логарифм самого основания равен единице;

5) при основании, большем единицы, большему числу соответствует и больший логарифм. В частности, при этом условии логарифмы чисел, больших единицы, положительны, а логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны;

6) при основании, меньшем единицы, большему числу соответствует меньший логарифм;

7) если основание логарифма больше единицы, то при неограниченном возрастании числа неограниченно возрастает и его логарифм, а при стремлении числа к нулю его логарифм, оставаясь отрицательным (с некоторого момента), неограниченно возрастает по абсолютной величине;

8) если основание логарифма меньше единицы, то при неограниченном возрастании числа его логарифм, оставаясь отрица-

* См. также пример 240.

тельным (с некоторого момента), неограниченно возрастает по абсолютной величине, а при стремлении числа к нулю его логарифм неограниченно возрастает;

9) логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел, т. е.

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Если $x < 0$ и $y < 0$, то

$$\log_a (xy) = \log_a (-x) + \log_a (-y).$$

Вообще, если числа x и y одного знака, то

$$\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|;$$

10) логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя, т. е.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Если $x < 0$ и $y < 0$, то

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a (-x) - \log_a (-y).$$

Вообще, если x и y одного знака, то

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|;$$

11) логарифм степени положительного числа равен показателю степени, умноженному на логарифм этого числа, т. е.

$$\log_a x^n = n \log_a x.$$

Если $x < 0$, а n четное, то

$$\log_a x^n = n \log_a (-x).$$

При четном n и любом $x \neq 0$

$$\log_a x^n = n \log_a |x|.$$

Логарифмировать математическое выражение — значит представить логарифм этого выражения через логарифмы частей, составляющих его. Операция потенцирования состоит в отыскании математического выражения по результату его логарифмирования.

Пример 67. Доказать равенство

$$\log_a N = \log_{a^n} N^n.$$

Решение. Положим $\log_a N = x$. Тогда по определению логарифма $a^x = N$. Возведя это равенство в степень n, получим $(a^x)^n = N^n$ или $(a^n)^x = N^n$. Но последнее и означает, что $x = \log_{a^n} N^n$.

Пример 68. Доказать равенство

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

Решение. Пусть $\log_b a = x$. Тогда $b^x = a$. Отсюда $\log_a b^x = \log_a a$, $x \log_a b = 1$, $\log_b a \cdot \log_a b = 1$, $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

Пример 69. Доказать равенство

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Решение. Положим $\log_a x = y$ и $\log_b x = z$. Тогда $a^y = x$, $b^z = x$, $a^y = b^z$. Логарифмируя последнее равенство, получим $y \log_b a = z \log_b b$. Подставляя сюда значения y и z, найдем $\log_a x \cdot \log_b a = \log_b x$. Отсюда

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Эта формула устанавливает правило перехода от логарифма числа по основанию b к логарифму того же числа по основанию a. Оказывается, что для этого достаточно умножить логарифм числа по основанию b на величину $N = \frac{1}{\log_b a}$, которая называется модулем перехода от системы логарифмов с основанием b к системе логарифмов с основанием a.

Пример 70. Вычислить $\log_{\sqrt[3]{5}} 6{,}125$, если $\log_{35} 7 = a$ и $\log_2 5 = b$.

Решение. $\log_{\sqrt[3]{5}} 6{,}125 = \log_{\sqrt[3]{5}} \frac{6125}{1000} = \log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8} = \log_5 \left(\frac{49}{8}\right)^3 = \log_5 \frac{7^6}{2^9} = 6 \log_5 7 - 9 \log_5 2$. Но $\log_5 7 = \log_{25} 7^2 = 2 \log_{25} 7 = 2a$, а $\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{b}$. Поэтому $\log_{\sqrt[3]{5}} 6{,}125 = 12a - \frac{9}{b} = \frac{3(4ab - 3)}{b}$.

Пример 71. Что больше, $\log_{\frac{1}{x}} x$ или $\log_x \frac{1}{x}$?

Решение. Они равны. Действительно, воспользуемся формулой $\log_a N = \log_{a^n} N^n$ (см. пример 67). Получим

$$\log_x \frac{1}{x} = \log_{x^{-1}} \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = \log_{\frac{1}{x}} x.$$

§ 4. Преобразование тригонометрических выражений

49. Выполняя преобразования математических выражений, содержащих знаки тригонометрических операций, пользуются алгебраическими действиями над тригонометрическими функциями и теми формулами, которые выводятся в тригонометрии Эти действия, а также границы применимости тригоиометрических формул и определений тригонометрических функций позволяют

установить в каждом случае допустимые значения букв рассматриваемого выражения. Из алгебраических действий особого внимания заслуживает извлечение корня. Корень обычно считается арифметическим. Что касается границ применимости тригонометрических формул, то они выясняются просто. Мы покажем это на примерах, приведенных ниже. Напомним еще, что операции $\sin x$ и $\cos x$ имеют смысл для любого вещественного x, причем $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$ или $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Для $\operatorname{tg} x$ и $\sec x$ допустимыми значениями x являются все вещественные числа, исключая числа вида $\frac{2k+1}{2}\pi$, а для $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$ — исключая числа $k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ При этом $|\sec x| \geqslant 1$, $|\operatorname{cosec} x| \geqslant 1$, а $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ могут принять любое значение.

Пример 72. Выяснить, при каких x справедливы следующие равенства:

а) $\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$; б) $\operatorname{cosec} x = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}$;

в) $\cos x = \cos(2\pi - x)$; г) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$;

д) $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; е) $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$.

Решение. а) Так как $\sqrt{1-\cos^2 x}$ арифметический, то $\sin x \leqslant 0$. Остальные операции не накладывают никаких ограничений на x. Но $\sin x \leqslant 0$ тогда, когда угол x оканчивается в третьем или четвертом квадрантах, т. е. при $(2k-1)\times$ $\times\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

б) Должно быть $\operatorname{cosec} x > 0$, т. е. равенство справедливо для углов, оканчивающихся в первом или втором квадрантах: $2k\pi < x < (2k+1)\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Значения $x = k\pi$, при которых $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$ не имеют смысла, находятся на границах этих квадрантов и нами исключены.

в) Формулы приведения для косинуса верны при любом значении угла x.

г) При всех x, кроме $x = (2k+1)\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

д) Ограничение накладывается только действием извлечения корня. Поэтому должно быть: $\sin\frac{x}{2} \geqslant 0$; $2k\pi \leqslant \frac{x}{2} \leqslant (2k+1)\pi$; $4k\pi \leqslant x \leqslant (4k+2)\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

е) При всех вещественных x.

Пример 73. При каких a возможно равенство

$$\sin a = \frac{a^2+b^2}{2ab} \quad (a \neq b, \ ab > 0)?$$

Решение.

$$\frac{a^2+b^2}{2ab} = \frac{a^2+2ab+b^2-2ab}{2ab} = \frac{(a-b)^2}{2ab} + 1 > 1.$$

Так как $|\sin\alpha| < 1$, то равенство невозможно ни при каком значении α.

Пример 74. Какой знак имеет произведение

$$\sin 4^\circ \sin 4?$$

Решение. $\sin 4^\circ > 0$. Синусом числа x называется число, равное синусу угла в x радианов. Поэтому $\sin 4 = \sin 4 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \sin\frac{720^\circ}{\pi} < 0$, так как $180^\circ < \frac{720^\circ}{\pi} < 270^\circ$, а синус угла третьего квадранта отрицательный. Следовательно, $\sin 4^\circ \sin 4 < 0$.

Пример 75. Что больше, косинус или котангенс одного и того же угла прямоугольного треугольника?

Решение. Если α — острый угол, то $\operatorname{ctg}\alpha > \cos\alpha$. Действительно,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha \cdot \frac{1}{\sin\alpha} > \cos\alpha \cdot 1,$$

так как $\frac{1}{\sin\alpha} > 1$.

Если $\alpha = 90^\circ$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \cos\alpha = 0$.

Пример 76. Упростить выражение

$$\sin\alpha - \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha},$$

если $\pi < \alpha < 2\pi$.

Решение.

$$\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha}{|\sin\alpha|}.$$

Но $\sin\alpha < 0$ при $\pi < \alpha < 2\pi$. Поэтому $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$ и данное выражение

$$A = \sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Пример 77. Проверить равенство

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}.$$

Решение.

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{4}.$$

Пример 78. Доказать тождество

$$\sin 7x \operatorname{tg} 3{,}5x + \cos 7x = 1.$$

Решение.

$$\sin 7x\frac{\sin 3{,}5x}{\cos 3{,}5x}+\cos 7x=\frac{\sin 7x\sin 3{,}5x+\cos 7x\cos 3{,}5x}{\cos 3{,}5x}=$$

$$=\frac{\cos(7x-3{,}5x)}{\cos 3{,}5x}=\frac{\cos 3{,}5x}{\cos 3{,}5x}=1.$$

Пример 79. Доказать тождество

$$256\sin^5 x\cos^4 x=6\sin x+4\sin 3x-4\sin 5x-\sin 7x+\sin 9x.$$

Решение.

$$256\sin^5 x\cos^4 x=256\sin x(\sin x\cos x)^4=256\sin x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^4=$$

$$=16\sin x\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2=4\sin x(1-2\cos 4x+\cos^2 4x)=$$

$$=4\sin x\left(1-2\cos 4x+\frac{1+\cos 8x}{2}\right)=$$

$$=2\sin x(3-4\cos 4x+\cos 8x)=$$

$$=6\sin x-8\sin x\cos 4x+2\sin x\cos 8x=$$

$$=6\sin x-4(\sin 5x-\sin 3x)+\sin 9x-\sin 7x=$$

$$=6\sin x+4\sin 3x-4\sin 5x-\sin 7x+\sin 9x.$$

Пример 80. Привести выражение

$$\cos(x+y)\cos z+\cos x+\cos y+\cos z-\sin(x+y)\sin z$$

к виду, удобному для логарифмирования.

Решение.

$$\cos(x+y)\cos z-\sin(x+y)\sin z+\cos x+\cos y+\cos z=$$

$$=\cos(x+y+z)+\cos x+\cos y+\cos z=$$

$$=2\cos\left(x+\frac{y+z}{2}\right)\cos\frac{y+z}{2}+2\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{y-z}{2}=$$

$$=2\cos\frac{y+z}{2}\left[\cos\left(x+\frac{y+z}{2}\right)+\cos\frac{y-z}{2}\right]=$$

$$=4\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{z+x}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Пример 81. Доказать, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=4\operatorname{tg}\beta,$$

если $5\sin\alpha=3\sin(\alpha+2\beta)$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)\sin\beta}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}[\sin(\alpha+2\beta)+\sin\alpha]}{\frac{1}{2}[\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha)]}=\frac{\frac{5}{3}\sin\alpha+\sin\alpha}{\frac{5}{3}\sin\alpha-\sin\alpha}=\frac{8\sin\alpha}{2\sin\alpha}=4.$$

Итак, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=4\operatorname{tg}\beta$.

Пример 82. Найти сумму

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots + \sin(\alpha+n\beta).$$

Решение. Обозначим искомую сумму буквой A. Умножим и разделим A на $2\sin\frac{\beta}{2}$. Получим

$$A = \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2} + 2\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2} + \right.$$

$$\left. + 2\sin(\alpha+2\beta)\sin\frac{\beta}{2} + \ldots + 2\sin(\alpha+n\beta)\sin\frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right) + \cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\beta\right) - \cos\left(\alpha+\frac{5}{2}\beta\right) + \right.$$

$$\left. + \ldots + \cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right) - \cos\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}} 2\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2} =$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Пример 83. Упростить выражение

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin x} + \frac{3\cos x}{\operatorname{tg} x} + 3\sin x.$$

Решение. Выразим все слагаемые через $\sin x$ и $\cos x$, а затем приведем к общему знаменателю. Получим

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} + \frac{3\cos^2 x}{\sin x} + 3\sin x = \frac{1}{\sin^3 x\cos^2 x}(\sin^4 x -$$

$$- \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + 3\sin^4 x\cos^2 x) =$$

$$= \frac{1}{\sin^3 x\cos^2 x}[\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x +$$

$$+ 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)] = \frac{1}{\sin^3 x\cos^2 x}(\sin^4 x + \cos^4 x -$$

$$- \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^2 x) = \frac{1}{\sin^3 x\cos^2 x}(\sin^4 x +$$

$$+ 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) = \frac{1}{\sin^3 x\cos^2 x}(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 =$$

$$= \frac{1}{\sin^3 x\cos^2 x}.$$

Пример 84. Верно ли равенство

$$\frac{\sqrt{1-\sin 2\alpha}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha,$$

если α — угол прямоугольного треугольника?

Решение. Углы $\alpha=90°$ и $\alpha=45°$ должны быть исключены, так как при этих α левая часть равенства теряет смысл. Преобразуем числитель первого слагаемого

$$\sqrt{1-\sin 2\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=$$
$$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|$$

Если $|\sin\alpha-\cos\alpha|=\sin\alpha-\cos\alpha$, т. е если $\sin\alpha-\cos\alpha>0$, то левая часть проверяемого равенства

$$A=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$$
$$=\frac{1}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$$
$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha.$$

В этом случае равенство верно. Если же $|\sin\alpha-\cos\alpha|=$ $=\cos\alpha-\sin\alpha$, т. е. $\sin\alpha-\cos\alpha<0$, то

$$A=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{-1}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-2}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-2}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$$
$$=\cos\alpha+\sin\alpha-\frac{2}{\cos\alpha+\sin\alpha}\neq\cos\alpha+\sin\alpha.$$

Итак, подлежащее проверке равенство верно, если $\sin\alpha-$ $-\cos\alpha>0$. Так как $\cos\alpha>0$, то получим, что $\operatorname{tg}\alpha-1>0$ и $\operatorname{tg}\alpha>1$ Но α — угол первого квадранта, и неравенство $\operatorname{tg}\alpha>1$ имеет место лишь при $45°<\alpha<90°$.

Пример 85. При каких α справедливо равенство

$$\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{2}=-\sqrt{2}(2+\operatorname{ctg}^2\alpha)?$$

Решение.

$$\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{2}{1-\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{2}{\sin^2\alpha}}=\frac{\sqrt{2}}{|\sin\alpha|}.$$

Теперь для левой части равенства получим

$$\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sqrt{2}}{|\sin\alpha|}-\sqrt{2}=-\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sin\alpha\,|\sin\alpha|}\right).$$

Для того чтобы в скобках получить $2+\operatorname{ctg}^2\alpha$, нужно положить $|\sin\alpha|=-\sin\alpha$, т. е. считать $\sin\alpha<0$ Действительно, в этом случае выражение в скобках будет равно

$$1+\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\operatorname{cosec}^2\alpha=2+\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Но если $\sin\alpha<0$, то $(2k+1)\pi<\alpha<(2k+2)\pi$.

Пример 86. В каком треугольнике его углы α и β связаны соотношением

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}?$$

Решение. Так как $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, а $\cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1$, то заданное равенство можно преобразовать так:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}=0,$$

$$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{1}{4}=0,$$

$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$

$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Но сумма квадратов вещественных чисел тогда и только тогда равна нулю, когда каждое из этих чисел равно нулю. Отсюда $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$ и $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0$. Из первого равенства, учитывая, что α и β — углы треугольника, получим $\alpha=\beta$. Но тогда, подставив $\alpha=\beta$ во второе, найдем $\cos\alpha-\frac{1}{2}=0$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Итак, $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$. Но тогда и третий угол равен $\frac{\pi}{3}$, т. е. треугольник правильный.

50. В тригонометрической функции $y=\sin x$ угол x (или число x) является аргументом, а y — функцией (см п. 71). Поменяем ролями функцию и аргумент, т. е. построим функцию, обратную данной (см. п. 71). При этом новую функцию будем также обозначать буквой y, а аргумент — буквой x. Тогда для обратной функции получим $x=\sin y$. Новая функция называется арксинусом и обозначается так:

$$y=\operatorname{Arcsin}x.$$

Записи $y=\operatorname{Arcsin}x$ и $x=\sin y$ равносильны, и поэтому можно сказать, что *арксинус x есть угол (или число), синус которого равен x*. Вместо слова «угол» часто употребляют слово «дуга».

Так как x есть синус, то допустимыми значениями для x являются лишь те, которые удовлетворяют неравенствам $-1\leqslant x\leqslant 1$.

По данному синусу можно найти не один угол, а бесконечное множество их. Поэтому говорят, что функция $y=\operatorname{Arcsin}x$ — (бесконечно) *многозначная* То ее значение y_1, соответствующее данному x_1, которое удовлетворяет неравенствам $-\frac{\pi}{2}<y_1<\frac{\pi}{2}$, называется главным значением функции $\operatorname{Arcsin}x$,

а если y_1 — угол, то — главным углом. Множество всех главных значений $\operatorname{Arcsin} x$, соответствующих всевозможным x от -1 до $+1$, называется главной ветвью $\operatorname{Arcsin} x$ и обозначается $\arcsin x$. Функция $y = \arcsin x$ *однозначная.*

Аналогично определяются $\operatorname{Arccos} x$ (арккосинус x), $\operatorname{Arctg} x$ (арктангенс x)*, $\operatorname{Arcctg} x$ (арккотангенс x) и их главные значения — $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Для обратных тригонометрических функций имеют место следующие зависимости.

$$\operatorname{Arcsin} x = k\pi + (-1)^k \arcsin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{Arccos} x = 2k\pi \pm \arccos x, \quad 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi;$$

$$\operatorname{Arctg} x = k\pi + \operatorname{arctg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{Arcctg} x = k\pi + \operatorname{arcctg} x, \quad 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi;$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\sin(\arcsin x) = x; \quad \cos(\arccos x) = x;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$$

Пример 87. Вычислить $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7}{8}\pi\right)$.

Решение. Из определения главного значения арктангенса следует, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, если только $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Поэтому

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7}{8}\pi\right) = \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)\right] = \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right] = -\frac{\pi}{8}.$$

Пример 88. Вычислить $\arccos\left(\sin\frac{15}{7}\pi\right)$.

Решение.

$$\arccos\left(\sin\frac{15}{7}\pi\right) = \arccos\left[\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{7}\right)\right] = \arccos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right) =$$

$$= \arccos\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right] = \arccos\left(\cos\frac{5\pi}{14}\right) = \frac{5\pi}{14}.$$

Пример 89. Вычислить $\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

Решение. Обозначим $\arcsin\frac{4}{5} = \alpha$. Тогда $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, а $\cos\alpha = +\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. Перед радикалом взят знак плюс потому, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, а косинус такого угла положительный. Теперь получим

$$\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right) = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}.$$

* См пример 244.

Пример 90. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$.

Решение. Положим $\arcsin\frac{5}{13}=\alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Но из равенства $\arcsin\frac{5}{15}=\alpha$ следует, что $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=+\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$, причем перед радикалом взят знак плюс, так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Итак,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)=\frac{5}{12+13}=\frac{1}{5}.$$

Пример 91. Доказать равенство

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}.$$

Решение. Положим $\operatorname{arctg}x=\alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=x$ и $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=x$. Так как по определению главного значения арктангенса $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2}<-\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\pi$. С другой стороны, всегда можно написать: $x=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x)$, причем $0<\operatorname{arcctg}x<\pi$. Итак, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x)$. Но если котангенсы равны и их углы заключены между 0 и π, то эти углы равны. Итак, $\frac{\pi}{2}-\alpha=\operatorname{arcctg}x$, $\frac{\pi}{2}=\alpha+\operatorname{arcctg}x$, $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$.

Пример 92. Доказать равенства:

а) $\arcsin(-x)=-\arcsin x$; б) $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

Решение. а) Положим $\arcsin(-x)=\alpha$. Тогда $\sin\alpha=-x$, $\sin(-\alpha)=x$, а так как $x=\sin(\arcsin x)$, то $\sin(-\alpha)=\sin(\arcsin x)$. Так как углы $-\alpha$ и $\arcsin x$ заключены в одних и тех же пределах, а именно между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, как главные значения арксинуса, то из равенства синусов следует равенство углов. Итак, $-\alpha=\arcsin x$, $\alpha=-\arcsin x$, $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

б) Положим $\arccos(-x)=\alpha$. Получим: $\cos\alpha=-x$, $\cos(\pi-\alpha)=x$, $\cos(\pi-\alpha)=\cos(\arccos x)$. Но $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $-\pi\leqslant-\alpha\leqslant 0$, $0\leqslant\pi-\alpha\leqslant\pi$. С другой стороны, $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$. Поэтому из равенства $\cos(\pi-\alpha)=\cos(\arccos x)$ следует: $\pi-\alpha=\arccos x$, $\alpha=\pi-\arccos x$, $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

Пример 93. Доказать равенство

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}.$$

Решение. Положим $\arcsin x = \alpha$. Отсюда $\sin\alpha = x$, причем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. При этих условиях

$$\cos\alpha = +\sqrt{1-x^2},$$

а

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-(1-x^2)}{2(1+\sqrt{1-x^2})}} = \pm\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}} =$$

$$= \pm\frac{|x|}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то знак плюс будет для $x > 0$ (в этом случае и $\alpha > 0$), а знак минус — для $x < 0$ (в этом случае и $\alpha < 0$). Но, с другой стороны, если $x > 0$, то $|x| = x$, а если $x < 0$, то $|x| = -x$. Поэтому

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}.$$

Пример 94. Вычислить сумму

$$\operatorname{arcctg} 2 + \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Решение. Положим $\operatorname{arcctg} 2 = \alpha$ и $\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \beta$, причем $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$. Отсюда

$$\operatorname{ctg}\alpha = 2;\ \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}},\ \operatorname{ctg}\beta = \frac{+\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\sin\beta} = 3.$$

Поэтому

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{2\cdot 3 - 1}{2+3} = \frac{5}{5} = 1$$

и

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Но так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$, то $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, и единственно возможное значение для k — это $k = 0$. Следовательно, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

Упражнения

59. Найти область допустимых значений следующих математических выражений:

а) $\frac{x}{x^2(x^2-1)}$; б) $\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}$, в) $\sqrt{x-2}\arcsin x$;

г) $\frac{1}{\log_a x^2}$; д) $\frac{\log(16-x^2)}{\sqrt{\sin x}}$.

60. Найти те значения букв, которые не являются допустимыми для них, если выражения такие:

$$\text{а)}\ \frac{\sqrt{x-y}}{x+y};\quad \text{б)}\ \frac{1}{\sin(x-y)}$$

61. Найти допустимые значения букв, входящих в следующие равенства:

а) $\sqrt{4x-3-x^2}=2x-3$; б) $\operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg}x$,

в) $\log(x-1)^2=2\log(1-x)$, г) $\sin x=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}$;

д) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x}=\cos x$.

62. Указать одночлены среди следующих выражений:

$$\text{а)}\ xy,\ \text{б)}\ (x+1)(y+1),\ \text{в)}\ \frac{a^2}{b},\ \text{г)}\ 3mn^2.$$

Доказать равенства (63—64)

63. $(a+b-c+d)^2+(a-b+c+d)^2=2[(a+d)^2+(b-c)^2]$

64. $(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2-(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)=(bc+ca+ab)^2$

Разложить на множители (65—70)

65. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$

66. $xy^2-xz^2+yz^2-yx^2+zx^2-zy^2$

67. $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz$.

68. $(a^2+b^2)^3+(c^2-a^2)^3-(b^2+c^2)^3$.

69. $x^4-5x^3+7x^2-5x+6$.

70. x^3+6x^2-32

71. Расположить многочлен $2x^3-12x^2+27x-19$ по степеням $x-2$.

72. Разделить многочлен $a+a^3x^2+x^3-ax+a^3x^3-2x^2+a^2x+x$ на $ax+1+x^2-2x-ax^2+a^2x^2$

73. Найти остаток от деления многочлена $7x^4-4x^3+4x^2+46x+1$ на $x+3$.

74. Найти неполное частное и остаток от деления многочлена $2x^4-3x^3+4x^2-4x-22$ на $x-2$.

75. При каких a и b многочлен $x^4+x^3-x^2+ax+b$ делится на x^2-x-2?

76. При каких a и b многочлен $x^4-2x^3-13x^2+ax+b$ делится на x^2-5x+1?

77. Многочлен $x^4+2x^3+ax^2+2x+b$ является квадратом другого многочлена. Найти этот последний многочлен, а также числа a и b.

78. Найти условие, при котором выражение $a^{m-1}+a^{m-2}+\ldots+a+1$ делится на выражение $a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1$, где m и n — натуральные числа

79. Многочлен $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$ с целыми коэффициентами a_0, a_1, ..., a_m делится на $x-a$, где a — целое число. Доказать, что сумма всех его коэффициентов имеет делителем целое число $a-1$.

Упростить выражения (80—83)

80. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$.

81. $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^3-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

82. $$\frac{1}{1-\left[\frac{a+b+(1+ab)x}{1+ab+(a+b)x}\right]^2}\times$$
$$\times\frac{(1+ab)[1+ab+(a+b)x]-(a+b)[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)x]^2}.$$

83 $$\frac{1-(m+x)^{-2}}{\left(1-\frac{1}{m+x}\right)^2}\cdot\left[1-\frac{1-(m^2+x^2)}{2mx}\right]^{-1},\quad \text{если } x=\frac{1}{m-1}.$$

84. Определить A, B и C так, чтобы имело место тождество
$$\frac{2x^2+3x-3}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

85 Доказать, что если $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, то $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$

86 Какое из двух чисел больше 18 или $4\sqrt{5}+\sqrt{82}$?

Упростить выражения (87—95)

87. $$\left[0{,}5\sqrt[3]{(\sqrt{7}+3)\sqrt[4]{7}-3\sqrt{7}-1}+\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}\right]:\left[\frac{\sqrt{7}-1}{2(\sqrt[4]{7}+1)}+1\right].$$

88. $$\left[2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^3\right]\ (3x^2+3y\sqrt{xy})+$$
$$+\frac{\sqrt{xy}-x}{x\sqrt{x}-y\sqrt{x}}.$$

89. $$\left[\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right]^{-2}\times$$
$$\times\sqrt[3]{b\sqrt{b}}\sqrt{a^2b^{-1}-2a+b},\quad a>0.$$

90 $$\frac{\sqrt{x^3y}\,x^{\frac{4}{3}}+\sqrt{x^4y^3}\,x^{\frac{1}{6}}}{(y^2-xy-2x^2)\sqrt{xy}}-$$
$$-x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3x^2}{3y-6x+2xy-y^2}:\frac{x+y}{3x-xy}-\frac{xy}{x+y}\right).$$

91. $$\left[\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{a})^2}{a-b}-\right.$$
$$\left.-\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right]:\frac{(4b)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}},$$

92. x^3+3x+5, если $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}}$.

93. $\left[\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right]\left[\sqrt{x^{-2}-1}+\frac{1}{x}\right]$,

если $x<0$.

94. $\left[(x+1)^{\frac{1}{n}}-(x-1)^{\frac{1}{n}}\right]^2+2\left(1-\sqrt[n]{x^2-1}\right)$,

если $x=[(2+\sqrt{3})^n+1][(2+\sqrt{3})^n-1]^{-1}$.

95. $x\sqrt[n]{a^k x^{-k}}+a\sqrt[n]{x^k a^{-k}}+2b\left(1-\sqrt{xb^{-1}}\right)$,

если $x=a^{\frac{2k}{2k-n}}:(\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{2k-n}}$

96. Проверить равенство

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},$$

где n — натуральное число.

97. При каких x справедливо равенство

$$\sqrt{2\left(\sqrt{1+\left(\frac{3^{2x}-3^{-2x}}{2}\right)^2}-1\right)}=3^{-x}-3^x?$$

98. Вычислить $\log_6 39{,}2$, зная, что $\log_7 2=a$ и $\log_3 10=b$.

99. Доказать, что

$$\frac{\log_a N\cdot\log_b N}{(\log_{ab} N)^2}=\frac{(1+\log_a b)^2}{\log_a b}$$

100. Доказать, что если $n^2=(kn)^{\log_k m}$, $\log_m x=\frac{1}{2}(\log_k x+\log_n x)$

101. Доказать, что если $b^2=ac$, причем a, b и c различны, то для любого $x\neq 1$ справедливо равенство

$$\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}=\frac{\log_a x}{\log_c x}.$$

102. Выяснить, при каких x справедливы следующие равенства:

а) $\sin 2x=2\sin x\cos x$;

б) $\cos x=+\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$, в) $\operatorname{ctg} x=-\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$;

г) $\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; д) $\sin(\pi+x)=\sin(2\pi-x)$;

е) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x}$.

103. Для тангенса половинного угла существуют следующие формулы:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\text{ и }\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Вторую можно получить из первой, если умножить числитель и знаменатель подкоренного выражения на $1+\cos\alpha$, заменить $1-\cos^2\alpha$ величиной $\sin^2\alpha$ и извлечь корень из дроби. В результате получится формула

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Почему же можно не писать знаки $+$ и $-$ в правой части равенства?

104. Найти наименьшее значение $|\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha|$.

105 Найти наибольшее значение $|\sin x+\cos x|$

106 Что больше, тангенс или синус угла треугольника?

107. Что больше, $\operatorname{tg}2\alpha$ или $2\operatorname{tg}\alpha$, если α — острый угол?

108. Что больше, $\sin(\alpha+\beta)$ или $\sin\alpha+\sin\beta$, где α и β — углы треугольника?

109. Упростить выражение

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}},$$

если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Доказать тождества (110—114):

110. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$

111. $\sin 6^\circ-\sin 42^\circ-\sin 66^\circ+\sin 78^\circ=-0{,}5.$

112. $\sin 2n\alpha+\sin 2n\beta+\sin 2n\gamma=(-1)^{n+1}\,4\sin n\alpha\cdot\sin n\beta\cdot\sin n\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, n — целое число

113 $4\sin(60^\circ+\alpha)\cos(30^\circ+\alpha)=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

114. $\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}+\dfrac{\sin(y-z)}{\cos y\cos z}+\dfrac{\sin(z-x)}{\cos z\cos x}=0.$

Привести выражения к виду, удобному для логарифмирования (115—119).

115. $2-\operatorname{ctg}x\sin 2x$.

116. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

117. $\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}40^\circ+\operatorname{ctg}50^\circ+\operatorname{ctg}60^\circ$

118. $1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

119 $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha-\dfrac{8\cos 2\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\sin^2 2\alpha}$,

120. Вычислить $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha+\sin\beta=a$ и $\cos\alpha+\cos\beta=b$.

121. Найти сумму $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos(\alpha+n\beta)$.

122. Упростить выражение

$$\frac{3}{\cos^2 x}+2\operatorname{cosec}^2 x+\frac{1}{2\operatorname{ctg}^4 x\cos^2 x}+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2\sin^2 x}+\frac{2\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}.$$

Выяснить, при каких α справедливы равенства (123—124):

123. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=2\operatorname{ctg}\alpha.$

124. $\sqrt{\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha}=-\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha.$

Вычислить выражения (125—128):

125. $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{17}{10}\pi\right)$

126. $\arcsin\left(\cos\frac{13}{8}\pi\right)$

127. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$

128. $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{12}{13}\right)$

Доказать равенства (129—133):

129 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

130 $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$

131 $\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x.$

132 $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{|x|}{\sqrt{2(1-\sqrt{1-x^2})}}$

133 $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\frac{3}{4}\pi$

Глава IV

Решение уравнений

§ 1. Общие сведения об уравнениях

51. Равенство, содержащее неизвестные числа, обозначенные буквами, называется уравнением. Эти буквы обычно называют неизвестными уравнения.

Уравнения в зависимости от числа неизвестных, входящих в них, разделяются на уравнения с одним неизвестным, с двумя неизвестными и т. д. Система значений неизвестных, удовлетворяющих уравнению, т. е. обращающих его в тождество, называется решением уравнения. В случае уравнения с одним неизвестным его решение называют также корнем. Решить уравнение — значит найти множество всех решений этого уравнения. Оно может быть конечным, бесконечным и пустым. В последнем случае уравнение называют противоречивым или не имеющим решения. Если уравнение удовлетворяется любой системой допустимых значений неизвестных, то говорят, что уравнение *удовлетворяется тождественно*.

Уравнение называется алгебраическим, если обе части его являются целыми алгебраическими выражениями относительно неизвестных. Алгебраическое уравнение всегда можно привести к такому виду, что в левой части будет многочлен относительно неизвестных, а в правой — нуль. Например, алгебраическое уравнение с одним неизвестным запишется так:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где n — натуральное число, называемое степенью уравнения.

Если обе части уравнения являются алгебраическими рациональными выражениями относительно неизвестных, но хотя бы одна его часть дробная, то уравнение называется дробным. Если обе части уравнения являются алгебраическими выражениями относительно неизвестных, но хотя бы одна его часть иррациональная, то уравнение называется иррациональным.

Часто все эти три вида уравнений — алгебраическое, дробное и иррациональное — называют алгебраическими, а каждое из них соответственно целым алгебраическим, дробным алгебраическим и иррациональным алгебраическим.

Уравнение называется трансцендентным, если над всеми или некоторыми неизвестными производятся трансцендент-

ные операции, например возведение в иррациональную степень, отыскание логарифма или значения какой-нибудь тригонометрической функции.

Пример 95. Выяснить, какое множество (конечное, бесконечное, пустое) образуют решения следующих уравнений:

$$\text{а) } x^3 = x;\ \text{б) } \operatorname{tg} x = 1;\ \text{в) } 3x = 4y;\ \text{г) } \frac{x^2}{x} = x;$$

$$\text{д) } \sin x = x^2 + 2;\ \text{е) } \sqrt{x} + \sqrt{y} + 1 = 0;$$

$$\text{ж) } \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Решение. а) Конечное: $x = -1,\ 0,\ 1.$

б) Бесконечное: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, где $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

в) Бесконечное: $x = 4t,\ y = 3t$, где t — любое число.

г) Бесконечное: x — любое число, не равное нулю. Уравнение удовлетворяется тождественно.

д) Пустое, так как $|\sin x| \leqslant 1$, а $x^2 + 2 \geqslant 2$. Уравнение противоречивое.

е) Пустое, так как $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ предполагаются арифметическими и левая часть $\geqslant 1$, в то время как правая равна нулю.

ж) Бесконечное: уравнение удовлетворяется при всех допустимых значениях x, т. е. тождественно.

Пример 96. Выяснить, какие из приведенных ниже уравнений являются алгебраическими (целыми, дробными, иррациональными) и какие трансцендентными:

$$\text{а) } x^4y^4 = x^2y^2;\ \text{б) } \operatorname{ctg} x^2 = \cos x^2;\ \text{в) } \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x;$$

$$\text{г) } x^{\sqrt{2}} = 4;\ \text{д) } \sqrt{x} = 1;\ \text{е) } 2^x = x + 2.$$

Решение. а) Целое алгебраическое.

б) Трансцендентное.

в) Дробное алгебраическое.

г) Трансцендентное.

д) Иррациональное алгебраическое.

е) Трансцендентное.

52. Если любое решение одного уравнения является решением другого, то последнее называется **следствием** первого уравнения.

Если же любое решение одного уравнения является решением другого и, обратно, любое решение второго является решением первого, то такие уравнения называются **эквивалентными** или **равносильными**. В частности, если оба уравнения не имеют решений, то они равносильны.

Обычно при решении уравнения производят различные математические операции над выражениями, входящими в него, и получают другие уравнения. Так поступают до тех пор, пока не

придут к уравнению, решение которого изучено. Если полученное уравнение эквивалентно исходному, то его решения и будут решениями данного. Если оно лишь следствие исходного, то полученное уравнение может иметь решения, которые не являются решениями данного уравнения и называются посторонними для него. Чтобы выявить посторонние решения, подставляют найденные значения неизвестных в данное уравнение, и если уравнение не удовлетворяется, то соответствующие решения будут посторонними.

Укажем некоторые теоремы о равносильности уравнений:

1) если из двух уравнений первое есть следствие второго, а второе есть следствие первого, то эти уравнения эквивалентны;

2) если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же выражение, имеющее смысл при всех допустимых значениях неизвестных, то полученное уравнение будет эквивалентно исходному уравнению;

3) если обе части уравнения умножить на одно и то же выражение, имеющее смысл и не равное нулю при всех допустимых значениях неизвестных, то полученное уравнение будет эквивалентно исходному уравнению.

При использовании первой теоремы полезно следить за *обратимостью операций* (см. п. 13).

Относительно второй и третьей теорем следует иметь в виду, что в них сформулированы лишь *достаточные условия* (см. п. 14) равносильности уравнений. Это значит, что если условия какой-либо из этих теорем не выполнены, то преобразованное уравнение все же может оказаться равносильным данному, но может оказаться и не равносильным ему. При этом возможна как потеря корней, так и появление посторонних.

Уравнения называются совместными, если они имеют хотя бы одно общее решение.

Пример 97. Выяснить, какое из данных двух уравнений есть следствие другого:

а) $x^2 = 1$ и $(x+2)x^2 = x+2$; б) $\cos x^2 = 0$ и $x^2 = \frac{\pi}{2}$;

в) $x^3 = x$ и $x^3 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$; г) $2\log_a x = 0$ и $\log_a x^2 = 0$.

Решение. а) Второе есть следствие первого, так как второе имеет корни $x = -2;\ -1;\ 1$, а первое — только $x = -1;\ 1$.

б) Корни второго $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, а первого $x = \pm\sqrt{\frac{2k+1}{2}\pi}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Следовательно, первое уравнение есть следствие второго.

в) Первое уравнение есть следствие второго. Действительно, все корни второго $(-1;\ 1)$ находятся среди корней первого $(-1;\ 0;\ 1)$.

г) Второе есть следствие первого, так как корни второго -1 и 1, а первое имеет только один кореиь, равный 1.

Пример 98. Выяснить, являются лн равносильными уравнения:

$$\text{а) } \sqrt{x^2+1}=x+1 \text{ и } \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=(x+1)^2,$$

$$\text{б) } \sqrt{(x-2)(x+3)}=6 \text{ и } \sqrt{x-2}\sqrt{x+3}=6;$$

$$\text{в) } \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \operatorname{tg} x=1$$

Решение а) Равиосильиы. Каждое из них имеет только один корень $x=0$

б) Неравносильны Первое имеет корни $x=6$ и $x=-7$, а второе — только один кореиь $x=6$. Значение $x=-7$ не является решеиием второго уравнения, так как $\sqrt{x-2}$ и $\sqrt{x-3}$ считаются арифметическими.

в) Неравносильны. Первое имеет корни $x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{4}$, а второе — $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Ни одно из них ие является следствием другого. Одиако они совместны, так как при $k=2n$ их корни одинаковы.

Пример 99. Дано уравиение $x^2-4=0$. Подобрать такое алгебраическое выражение, чтобы после умножения на него даиного уравнения: а) получилось уравиение, которое было бы следствием даниого, б) данное уравнение оказалось бы следствием полученного; в) даниое и полученное оказались бы несовместными.

Решение. а) Уравнеиие $(x-1)(x^2-4)=0$ есть следствие уравнеиия $x^2-4=0$. Кории первого 1, 2; -2, а второго 2; -2.

б) Уравнение $x^2-4=0$ есть следствие уравнеиия $\frac{x^2-4}{x-2}=0$. Первое имеет корни 2 и -2, а второе — только -2.

в) Уравнения $x^2-4=0$ и $\sqrt{1-x^2}(x^2-4)=0$ несовместны. Действительно, корни первого 2 и -2, а второго 1 и -1.

Пример 100. Будут ли эквивалентными уравнения.

$$\text{а) } A=B \text{ и } A^2=B^2, \text{ б) } A=B \text{ и } A^3=B^3?$$

Решеиие. а) Второе уравнение является следствием первого Но первое может оказаться следствием второго (и тогда уравнения будут эквивалентиыми), однако может и ие оказаться им, так как для того, чтобы $A^2=B^2$, достаточно как $A=B$, так и $A=-B$.

б) Уравнения будут эквивалентными, если задача решения уравнеиия рассматривается на множестве вещественных чисел, как это бывает, например, в том случае, когда уравнение $A=B$ иррациональиое. Действительио, уравиеиие $A^3=B^3$ можно

переписать так: $A^3 - B^3 = 0$ или $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = 0$. Но $A^2 + AB + B^2 = \left(A + \frac{1}{2}B\right)^2 + \frac{3}{4}B^2$ не может равняться нулю ни при каких вещественных A и B, ие равных нулю.

На множестве комплексных чисел уравнения $A = B$ и $A^3 = B^3$ не эквивалентиы.

53. Два или больше двух уравиеиий, в каждом из которых неизвестные, обозначенные одинаковыми буквами, имеют одиу и ту же величину, образуют система уравнений.

Решением системы называется такая совокупность значений неизвестных, которые, будучи подставлеиы в уравнения системы вместо неизвестных, обратят каждое уравнеиие в тождество.

Решить систему — значит иайти множество всех ее решеиий. Оно может быть *конечным*, *бесконечным* и *пустым*. В последнем случае система не имеет решений и называется противоречивой. *Если хотя бы одно уравнение системы противоречиво, то и система противоречива.*

Подобно уравнениям, системы бывают с одним неизвестным, с двумя неизвестными и т. д., а также алгебраические и траисцендентиые.

Если любое решеиие одной системы уравнений является решеиием другой, то последияя иазывается следствием первой системы. Если же сверх того и первая является следствием второй, то системы называются эквивалеитиыми или равиосильными.

Укажем некоторые теоремы о равиосильности систем:

1) если уравнеиие системы заменить эквивалентным ему уравнением, то новая система будет эквивалеитна даниой;

2) если из системы удалить уравнение, удовлетворяющееся тождествеино, то новая система будет эквивалентна данной,

3) если из системы удалить уравнеиие, являющееся следствием других уравнений этой системы, то новая система будет эквивалентна данной;

4) если для некоторого уравнения системы получеио его общее решеиие в виде равеиства, выражающего одно неизвестное через другие, и это значение неизвестного подставлеио во все остальные уравнения системы, то полученные уравнения вместе с равенством для найденного неизвестного образуют систему, эквивалентиую даниой.

Последняя теорема обосновывает известиый метод подстановки.

Пример 101. Выяснить, какое множество (конечиое, бесконечное, пустое) образуют решеиия следующих систем уравнеиий:

а) $x^2 - 4 = 0$, $x^3 - 8 = 0$; б) $x + 2y - 1 = 0$, $2x + 4y - 2 = 0$;

в) $\lg(x - y) = 0$, $\sqrt{y - x} = 1$.

Решение. а) Конечное, так как система имеет только одно решение: $x = 2$.

б) Второе уравнение есть следствие первого, и его можно отбросить. Общее решение получим в виде $x = 1 - 2y$, где y — любое число. Множество решений бесконечное.

в) Для первого уравнения должно быть $x - y > 0$, а для второго $y - x \geqslant 0$. Система противоречива и множество решений пустое.

Пример 102. Выяснить, являются ли приведенные ниже системы равносильными:

а) $A = 0$, $B \neq 0$ и $A + B = 0$, $A - B = 0$;

б) $A = B$, $C = D$ и $A = B$, $AC = BD$;

в) $A = B$, $C = D$ и $A = B$, $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$.

Решение. а) Всякое решение первой системы является решением второй. Если же заметить, что $A = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(A - B)$ и $B = \frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}(A - B)$, то видно, что всякое решение второй системы есть решение первой. Следовательно, данные системы равносильны.

б) Всякое решение первой системы является решением второй. Всякое решение второй, получаемое при $A = B = 0$ и $C \neq D$, не является решением первой. Отсюда следует, что данные системы, вообще говоря, неравносильны.

в) Всякое решение первой системы, для которого $C = D \neq 0$, является решением второй. Но решение первой системы, для которого $C = D = 0$ (если оно существует), не является решением второй. В общем случае эти системы неравносильны.

§ 2. Решение алгебраических уравнений

54. Линейным уравнением называется алгебраическое уравнение первой степени относительно неизвестных.

Простейшее из них — линейное уравнение с одним неизвестным — можно привести к виду

$$ax + b = 0.$$

Мы будем обычно считать $a \neq 0$. При этом условии линейное уравнение с одним неизвестным всегда имеет решение и притом единственное. Это следует из однозначной выполнимости деления числа $-b$ на число $a \neq 0$. Однако нужно считаться с фактом, что преобразование уравнения к виду $ax + b = 0$ может привести к исчезновению x. В этом случае говорят, что уравнение не имеет решения, если $b \neq 0$, и говорят, что оно удовлетворяется тождественно, если $b = 0$.

Уравнение с двумя неизвестными, с тремя неизвестными и т. д. приводится соответственно к виду $ax+by=c$, $ax+by+cz=d$ и т. д. Одно уравнение с несколькими неизвестными имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений. Если же в результате преобразований неизвестные исчезнут, что можно рассматривать как обращение в нуль коэффициентов при всех неизвестных, а свободный член окажется отличным от нуля, то уравнение не будет иметь решений.

Уравнение называется линейным однородным, если его свободный член равен нулю.

Пример 103. Решить уравнение

$$\frac{m-x}{m-n}-\frac{x-n}{m+n}=\frac{2mn}{m^2-n^2}.$$

Решение. Здесь предполагается, что $m\neq\pm n$; любые другие значения m и n могут принимать. Освобождаем уравнение от знаменателей и переносим члены с неизвестными в одну сторону равенства, а прочие — в другую. Получим: $(m+n)(m-x)-(m-n)(x-n)=2mn$; $-(m+n)x-(m-n)x=2mn-m(m+n)-n(m-n)$; $-2mx=2mn-m^2-mn-mn+n^2$; $-2mx=n^2-m^2$. Из характера действий видим, что полученное уравнение $2mx=m^2-n^2$ равносильно данному. Но m не должно быть равно лишь $\pm n$, нулем же может быть. Если $m=0$, то уравнение не имеет решения, так как $m^2-n^2=-n^2\neq 0$, потому что $n\neq 0$, иначе было бы $m=n$. Если $m\neq 0$, то $x=\frac{m^2-n^2}{2m}$.

Пример 104. Решить уравнение

$$\frac{x+3}{4}-\frac{|x-4|}{9}=\frac{1}{2}-\frac{x+5}{36}.$$

Решение. $9(x+3)-4|x-4|=18-x-5$; $10x+14=4|x-4|$; $5x+7=2|x-4|$.

Отсюда 1) если $x\geqslant 4$ или $x-4\geqslant 0$, то $|x-4|=x-4$, $5x+7=2x-8$, $3x=-15$, $x=-5$, что невозможно, так как $-5<4$; 2) если $x-4<0$, то $|x-4|=4-x$, $5x+7=8-2x$, $7x=1$, $x=\frac{1}{7}<4$.

Уравнение имеет единственное решение: $x=\frac{1}{7}$.

Пример 105. Решить уравнение

$$2|x|-|x+1|=2.$$

Решение. 1. Если $x\leqslant -1$, то $|x+1|=-(x+1)$, $|x|=-x$, $-2x+x+1=2$, $-x=1$, $x=-1$.

2. Если $-1<x\leqslant 0$, то $|x+1|=x+1$, $|x|=-x$, $-2x-x-1=2$, $-3x=3$, $x=-1$. Но -1 находится вне

рассматриваемого промежутка для x, да и ранее это значение было уже получено.

3. Если $x > 0$, то $|x+1| = x+1$, $|x| = x$, $2x - x - 1 = 2$, $x = 3$. Итак, решения уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

55. Чтобы решить дробное алгебраическое уравнение, его обычно приводят к целому алгебраическому уравнению. Один из способов состоит в том, что переносят все члены дробного уравнения в одну сторону, приводят к общему знаменателю и делают сокращение дроби. Тогда уравнение принимает вид $\frac{A}{B} = 0$, где A и B — целые алгебраические выражения. Полученное уравнение заменяют уравнением $A = 0$. Однако уравнение $A = 0$ в общем случае будет лишь следствием исходного дробного, а не эквивалентным ему. Поэтому среди решений уравнения $A = 0$ будут находиться все решения исходного уравнения, но могут быть и посторонние для него. Такими решениями будут те из них, которые не являются допустимыми для данного дробного уравнения. Например, решая уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2}$ этим способом, мы придем к уравнению $\frac{x-2}{2x} = 0$. Здесь $A = x - 2$, а $B = 2x$. Уравнение $A = 0$ имеет корень $x = 2$, и этот корень не обращает знаменатель дроби $\frac{x-2}{2x}$ в нуль. Но для данного уравнения $x = 2$ есть посторонний корень, так как там есть выражение $\frac{1}{x-2}$. Отсюда следует, что рассматриваемое уравнение не имеет решений.

Поэтому решения уравнения $A = 0$ нужно испытать путем подстановки их в исходное дробное уравнение, и те из них, при которых какое-нибудь выражение, входящее в дробное уравнение, будет терять смысл, нужно отбросить, потому что для данного уравнения они будут посторонними.

Пример 106. Решить уравнение

$$\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{8}{4x^2-1}$$

Решение. Перенеся все члены уравнения в одну сторону равенства и приведя их к общему знаменателю, получим следующее уравнение, равносильное данному: $\frac{8x-8}{4x^2-1} = 0$. Приравняв числитель полученной дроби нулю, придем к уравнению $8x - 8 = 0$. Его единственный корень $x = 1$ является также корнем данного уравнения. Проверку этого факта можно провести подстановкой $x = 1$ в каждый из знаменателей дробей, входящих в уравнение. Так как ни один из них не обращается

в нуль, то можно быть уверенным, что $x = 1$ является корнем данного уравнения.

Пример 107. Решить уравнение

$$\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 1.$$

Решение. Общий знаменатель дробей будет $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$. Перенеся все члены уравнения в одну сторону и приведя их к общему знаменателю, получим:

$$\frac{(3x-1)(x+3)-(2x+5)(x-1)+4-(x^2+2x-3)}{(x+3)(x-1)} = 0,$$

$$\frac{3x+9}{(x+3)(x-1)} = 0$$

или

$$\frac{3}{x-1} = 0.$$

Полученное уравнение есть следствие данного, а так как оно не имеет решений, то и данное не имеет их.

Пример 108. Решить уравнение.

$$\frac{ax-1}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x^2+1)}{x^2-1}.$$

Решение. Переносим все члены в одну сторону и приводим дроби к общему знаменателю:

$$\frac{(ax-1)(x+1)+b(x-1)-a(x^2+1)}{x^2-1} = 0,$$

$$\frac{ax+bx-x-1-b-a}{x^2-1} = 0, \quad \frac{(a+b-1)x-a-b-1}{x^2-1} = 0.$$

Отсюда $(a+b-1)x = a+b+1$. Это уравнение есть следствие данного. Если $a+b-1=0$, т. е. $a+b=1$, то $a+b+1=2$, и это уравнение, а следовательно, и данное не имеют решения. Если же $a+b-1 \neq 0$, то последнее уравнение имеет решение $x = \frac{a+b+1}{a+b-1}$. Будет ли оно решением данного? Будет, если $\frac{a+b+1}{a+b-1}$ не равно ± 1, так как при $x = \pm 1$ члены уравнения теряют смысл. Но $\frac{a+b+1}{a+b-1}$ равно 1 быть не может, потому что тогда было бы $a+b+1=a+b-1$, т. е. $1=-1$. Равенство же $\frac{a+b+1}{a+b-1} = -1$ возможно, если $a+b+1 = -(a+b)+1$, $2(a+b)=0$, $a+b=0$. Итак, если $a+b \neq 0$ и $a+b \neq 1$, то уравнение имеет единственное решение:

$$x = \frac{a+b+1}{a+b-1}.$$

Если же $a+b=1$ или $a+b=0$, то решения нет.

56. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными всегда может быть приведена к виду

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \qquad (*)$$

Умножим первое уравнение на b_2, а второе на $-b_1$ и полученные уравнения сложим. Затем умножим первое уравнение на $-a_2$, второе на a_1 и результаты сложим. Таким образом, придем к выводной системе

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)\,x = c_1b_2 - c_2b_1; \\ (a_1b_2 - a_2b_1)\,y = a_1c_2 - a_2c_1. \end{cases} \qquad (**)$$

Эта выводная система есть следствие данной.

Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то решение выводной системы будет иметь вид:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Но решение выводной системы может и не быть решением данной, поэтому еще нужно доказать, что полученные значения x и y удовлетворяют данной системе. Для доказательства достаточно подставить в уравнения системы эти значения x и y и убедиться, что получатся тождества.

Таким образом, при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ система (*) имеет единственное решение. Если $a_1b_2 - a_2b_1 = c_1b_2 - c_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ и хотя бы один из коэффициентов a_1, a_2, b_1,b_2 отличен от нуля, то система имеет бесконечное множество решений и ее называют неопределенной. Условия неопределенности системы обычно записывают так:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$ (или $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$), то система не имеет решения; обычно эти условия записывают так:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Уравнения системы, не имеющей решения, несовместны. Поэтому и систему в этом случае называют несовместной.

Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, когда оно единственно, можно найти с помощью известных способов *подстановки* или *сложения и вычитания*. Этими же способами можно найти решение трех линейных уравнений с тремя неизвестными, если оно единственное, и n уравнений с n неизвестными Заметим, что система однородных уравнений всегда имеет нулевое решение, т. е. $x = y = \ldots = 0$.

Чтобы система линейных уравнений с n нензвестными имела единственное решение, достаточно, чтобы она состояла из n непротиворечивых и независимых уравнений. Под независимым уравнением здесь понимается такое уравнение системы, которое не является следствием других уравнений этой системы.

Если число уравнений системы меньше числа неизвестных, то такая система или не имеет решений, или имеет их бесконечное множество.

Все сказанное о линейных уравнениях и системах линейных уравнений остается верным и в том случае, если в выражениях, входящих в уравнения, имеются комплексные величины.

Пример 109. Определить a и b так, чтобы система $(1+a)x+(a+b)y=b-a$; $(5+a)x+2(a+b)y=b-1$ была неопределенной.

Решение. Для того чтобы рассматриваемая система была неопределенной, необходимо выполнение равенства $(a+b)(5+a)-2(a+b)(1+a)=0$. Из него находим, что $a=-b$ и $a=3$. Если $a=-b$, то система принимает вид $(1+a)x=-2a$, $(5+a)x=-a-1$ и чтобы существовал x, удовлетворяющий этим двум уравнениям, достаточно выполнения равенства $\frac{2a}{1+a}=\frac{1+a}{5+a}$. Из него найдем: $a^2+8a-1=0$, $a=-4\pm\sqrt{17}$. При $a=3$ данная система приводится к виду $4x+(3+b)y=b-3$, $8x+2(3+b)y=b-1$, и, чтобы она была неопределенной, достаточно выполнения равенства $4(b-1)=8(b-3)$. Это будет иметь место при $b=5$.

Итак, система неопределенная, если $a=-b=-4\pm\sqrt{17}$ или $a=3$, $b=5$.

Пример 110. Определить a так, чтобы система

$$3x+y-z=1;\ 2x-y+2z=5;\ x-2y-3z=0;$$
$$(a+1)x+2y+az=7$$

была совместна.

Решение. Решим систему трех первых уравнений. Вычтем из первого уравнения второе и третье. Получим: $4y=-4$, $y=-1$. Умножим первое уравнение на 2 и сложим результат со вторым. Это даст $8x+y=7$, $8x=8$; $x=1$. Теперь найдем из любого уравнения $z=1$. Так как совместность системы означает наличие у всех уравнений системы общего решения, то значения $x=1$, $y=-1$, $z=1$ должны удовлетворять четвертому уравнению. После подстановки их получим: $a+1-2+a=7$; $2a=8$; $a=4$.

Пример 111. Решить систему

$$2x+3|y|=13;\ 3x-y=3.$$

Решение. Пусть $y\geqslant 0$. Тогда $|y|=y$, и система будет иметь вид: $2x+3y=13$, $3x-y=3$. Ее решение $x=2$, $y=3$. Пусть $y<0$. Тогда $|y|=-y$, и система будет такой:

$2x - 3y = 13$, $3x - y = 3$. Решение этой системы: $x = -\frac{4}{7}$, $y = -\frac{33}{7}$. Итак, данная система имеет два решения: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ и $x_2 = -\frac{4}{7}$, $y_2 = -\frac{33}{7}$.

Пример 112. Решить систему

$$ax + by = c^2; \quad \frac{a+x}{b} = \frac{b+y}{a}$$

Решение. Рассматривая второе уравнение как пропорцию, умножим члены первого отношения на $a \neq 0$, а второго на $b \neq 0$ и воспользуемся следующей производной пропорцией: если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{m+p}{n+q}$. Получим $\frac{a(a+x)}{ab} = \frac{b(b+y)}{ab} = \frac{a^2+ax+b^2+by}{ab+ab} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$. Здесь мы положили $ax + by = c^2$ на основании первого уравнения. Отсюда

$$\frac{a+x}{b} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}, \quad a + x = \frac{a^2+b^2+c^2}{2a};$$

$$x = \frac{a^2+b^2+c^2}{2a} - a, \quad x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2a}.$$

Аналогично найдем

$$y = \frac{c^2+a^2-b^2}{2b}.$$

Пример 113. Решить систему

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \quad \frac{y}{5} = \frac{z}{6}; \quad 3x - 2y + z = 18.$$

Решение. Умножим знаменатели первого уравнения на 5, а второго на 3. Это даст $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{18} = t$. Отсюда $x = 10t$, $y = 15t$, $z = 18t$. Подставляем в третье уравнение. Получим: $30t - 30t + 18t = 18$, $18t = 18$, $t = 1$ и $x = 10$, $y = 15$, $z = 18$.

Пример 114. Решить систему

$$x + y + z + a(x + y) + a^2x = a^3; \; x + y + z + b(x + y) + b^2x = b^3, \; x + y + z + c(x + y) + c^2x = c^3,$$

где a, b и c — попарно различные числа.

Решение. Вычитая из первого уравнения второе, а из второго третье, получим: $(a - b)(x + y) + (a^2 - b^2)x = a^3 - b^3$, $(b - c)(x + y) + (b^2 - c^2)x = b^3 - c^3$.

Эти два уравнения вместе с каким-либо из данных уравнений образуют систему, эквивалентную данной. Разделим первое уравнение на $a - b \neq 0$, а второе на $b - c \neq 0$. Это приведет к системе

$$\left.\begin{aligned} x + y + (a + b)x &= a^2 + ab + b^2; \\ x + y + (b + c)x &= b^2 + bc + c^2. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим: $(a-c)x = a^2 + ab - bc - c^2$; $(a-c)x = (a^2 - c^2) + b(a-c)$. Разделив это выражение на $a - c \neq 0$, найдем: $x = a + b + c$. Подставив это значение x в первое уравнение системы (*), получим $y = -(ab + bc + ca + a + b + c)$. Зная x и y, находим z из любого уравнения данной системы: $z = abc + ab + bc + ca$.

Пример 115. Решить систему

$$3xy = 2(x + y);\ 5yz = 6(y + z);\ 4zx = 3(z + x).$$

Решение. Решение $x = y = z = 0$ очевидно. Предполагая теперь $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, запишем систему так:

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{2};\ \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{6};\ \frac{z+x}{zx} = \frac{4}{3}$$

или

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2};\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6};\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3}.$$

Сложим эти три уравнения. Это даст: $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = \frac{22}{6}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6}$. Вычитая из этого уравнения уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$, получим: $\frac{1}{z} = \frac{2}{6}$, $z = 3$. Затем, вычитая из него же $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6}$ и $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3}$, найдем: $x = 1$, $y = 2$.

Пример 116. Найти вещественные x и y, если

$$\frac{2x+i}{y+i} = \frac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}.$$

Решение. Преобразуем правую часть равенства.

$$\frac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$$

Поэтому равенство примет вид $\frac{2x+i}{y+i} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$.

Умножая равенство на $y + i \neq 0$, получим: $2x + i = (y + i)(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$; $2x + i = y\cos 2\alpha - \sin 2\alpha + i(\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha)$. Приравнивая вещественные части левой и правой частей равенства, а затем мнимые, придем к системе

$$2x = y\cos 2\alpha - \sin 2\alpha;\ 1 = \cos 2\alpha + y\sin 2\alpha.$$

Если $\alpha \neq k\pi$, то из второго уравнения находим

$$y = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

Подставляя $y = \operatorname{tg}\alpha$ в первое, найдем

$$2x = \operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha - \sin 2\alpha = \frac{\sin\alpha\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha - 2\alpha)}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Итак, $x = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\alpha$. Если же $\alpha = k\pi$, то данное урав-

нение принимает вид $y = 2x$ и поэтому имеет бесконечно много решений.

57. Квадратным уравнением или уравнением второй степени с одним неизвестным называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$. В школьном курсе математики принято считать a, b и c вещественными числами, причем $a \neq 0$.

Что касается корней, то учитываются не только вещественные, но и мнимые.

Квадратное уравнение имеет два корня. Характер его корней определяется с помощью величины $d = b^2 - 4ac$, которая называется дискриминантом квадратного уравнения. Именно, если $d > 0$, $d = 0$, $d < 0$, то корни уравнения соответственно *вещественные различные, вещественные равные, мнимые.*

Формула решения квадратного уравнения

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

верна *при всех* $a \neq 0$, *в том числе и при* $a < 0$. Для уравнения с четным коэффициентом при x, т. е. когда $ax^2 + 2b_1x + c = 0$, лучше пользоваться такой формулой

$$x = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}.$$

Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения связаны равенствами: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ (теорема Виета).

Пример 117. Составить квадратное уравнение (с вещественными коэффициентами), один из корней которого $\frac{2+i}{1-i}$.

Решение. $x_1 = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{2} = \frac{1+3i}{2}$. Квадратное уравнение должно иметь также корень $x_2 = \frac{1-3i}{2}$, сопряженный данному (см. п. 35, пример 22). Так как $x_1 + x_2 = \frac{1+3i}{2} + \frac{1-3i}{2} = 1$, а $x_1x_2 = \frac{(1+3i)(1-3i)}{4} = \frac{5}{2}$, то по теореме Виета получим: $x^2 - x + \frac{5}{2} = 0$ или $2x^2 - 2x + 5 = 0$.

Пример 118. В уравнении $x^2 - 6x + m = 0$ сумма кубов корней равна 72. Найти свободный член m уравнения.

Решение. Так как $x_1 + x_2 = 6$, $x_1x_2 = m$, $x_1^3 + x_2^3 = 72$, то, пользуясь формулой $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) + x_2^3$, получим: $6^3 = 72 + 3m \cdot 6$, $12 = 4 + m$, $m = 8$.

Пример 119. Показать, что при любом вещественном k уравнение

$$(x+1)(x+3) + k(x+2)(x+4) = 0$$

имеет вещественные корни.

Решение. В этом случае дискриминант d должен быть положительным. Проверим это: $d=(4+6k)^2-4(1+k)(3+8k)=4[(2+3k)^2-(1+k)(3+8k)]=4(k^2+k+1)=$
$=4\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0.$

Пример 120. Решить уравнение

$$(a^2-b^2)x^2-2a^2bx+a^2b^2=0.$$

Решение. Если $a^2-b^2\neq 0$, т. е. если $a\neq\pm b$, то это уравнение квадратное, и по формуле решения получим:

$$x=\frac{a^2b\pm\sqrt{a^4b^2-(a^2-b^2)a^2b^2}}{a^2-b^2}=\frac{a^2b\pm\sqrt{a^2b^4}}{a^2-b^2}=\frac{a^2b\pm ab^2}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{ab(a\pm b)}{a^2-b^2};\quad x_1=\frac{ab}{a-b},\ x_2=\frac{ab}{a+b}.$$

Если $a=\pm b$, то уравнение будет первой степени и корень его $x=\frac{b}{2}$. При этом предполагалось, что a и b не равны нулю одновременно. Случай $a=b=0$ не представляет интереса, но при этих значениях a и b уравнение удовлетворяется тождественно.

Пример 121. Решить уравнение

$$2+\frac{2x^2-8x}{2x^2+8x}+\frac{2x^2+7x+23}{2x^2+7x-4}=\frac{2x+5}{2x-1}.$$

Решение. Так как $2x^2+8x=2x(x+4)$, $2x^2+7x-4=$
$=(2x-1)(x+4)$, то значения $x=-4;\ 0;\ \frac{1}{2}$ не являются допустимыми. Сокращая вторую дробь на $2x$, приводя к общему знаменателю и освобождаясь от него, получим:

$$2(2x-1)(x+4)+(x-4)(2x-1)+2x^2+7x+23=$$
$$=(2x+5)(x+4);\ 6x^2-x-1=0;\ x_1=-\frac{1}{3};\quad x_2=\frac{1}{2}.$$

Второй корень посторонний, так как $\frac{1}{2}$ не принадлежит области допустимых значений. Уравнение имеет один корень: $x=-\frac{1}{3}$.

Пример 122. Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}-\frac{18}{x^2+2x+1}=0.$$

Решение. Положим $x^2+2x+1=y$. Получим следующее уравнение, эквивалентное данному:

$$\frac{1}{y-4}+\frac{18}{y+1}-\frac{18}{y}=0. \qquad (*)$$

Сложив дроби в левой части и приведя подобные члены в числителе, придем к уравнению

$$\frac{y^2-17y+72}{y(y+1)(y-4)}=0.$$

Освободившись от знаменателя, получим квадратное уравнение

$$y^2-17y+72=0,$$

которое является следствием уравнения (*). Его корни $y_1=9$ и $y_2=8$ будут также корнями уравнения (*), что легко проверить, подставив y_1 и y_2 в уравнение (*).

Таким образом, задача свелась к решению следующих двух уравнений:

$$1)\ x^2+2x+1=9;$$
$$2)\ x^2+2x+1=8.$$

Из первого уравнения находим: $(x+1)^2=9$, $x+1=\pm 3$; $x_1=2$, $x_2=-4$. Из второго уравнения получаем: $(x+1)^2=8$, $x+1=\pm 2\sqrt{2}$; $x_3=-1+2\sqrt{2}$, $x_4=-1-2\sqrt{2}$.

Пример 123. Решить уравнение

$$(1+x+x^2)^2=\frac{a+1}{a-1}(1+x^2+x^4).$$

Решение. Замечая, что $1+x^2+x^4=(1+2x^2+x^4)-x^2=(1+x^2)^2-x^2=(1+x+x^2)(1-x+x^2)$, записываем данное уравнение так:

$$(1+x+x^2)^2=\frac{a+1}{a-1}(1+x+x^2)(1-x+x^2).$$

Перенесем все члены в последнем уравнении в левую часть и вынесем за скобку множитель $1+x+x^2$. Тогда решение данного уравнения сведется к решению следующих двух:

$$1)\ x^2+x+1=0;$$
$$2)\ x^2+x+1=\frac{a+1}{a-1}(x^2-x+1).$$

Из первого уравнения находим $x_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Затем, перенеся все члены второго уравнения в левую часть и освободившись от знаменателя, получаем уравнение

$$2x^2-2ax+2=0$$

или

$$x^2-ax+1=0.$$

Из него находим $x_{3,4}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$, причем a предполагается не равным единице.

Пример 124. Решить уравнение

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}.$$

Решение. Замечаем, что значения 0 и $-(a+b)$ не являются допустимыми для x. Параметры a и b тоже не равны нулю.

Освобождаем уравнение от знаменателей. Получаем:

$$(a+b+x)bx+(a+b+x)ax+(a+b+x)ab-abx=0;$$
$$(a+b)x^2+(a+b)^2x+(a+b)ab=0.$$

Если $a+b=0$, то уравнение удовлетворяется тождественно, т. е. при всех значениях x, кроме $x=0$. Само уравнение в этом случае принимает вид $\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$. Если $a+b\neq 0$, то, разделив уравнение на $a+b$, получим квадратное уравнение $x^2+(a+b)x+ab=0$. Корни его: $x_1=-a$, $x_2=-b$.

58. В школьном курсе элементарной математики алгебраические уравнения степени $n>2$ в общем случае не изучаются, а рассматриваются лишь некоторые виды этих уравнений. Перечислим их.

1. Двучленное уравнение, т. е. уравнение вида $y^n\pm A=0$, где $A>0$. С помощью замены $y=x\sqrt[n]{A}$ его можно свести к уравнению $x^n\pm 1=0$. При этом ограничиваются значениями $n=3, 4, 6$.

2. Трехчленное уравнение, т. е. уравнение вида $ax^{2n}+bx^n+c=0$, где $a\neq 0$. С помощью замены $x^n=y$ решение трехчленного уравнения сводится к решению квадратного $ay^2+by+c=0$ и решению двучленного $x^n=y$.

При $n=2$ уравнение называется биквадратным.

3. Возвратное уравнение, т. е. уравнение вида $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+cx^2+bx+a=0\,(a\neq 0)$. В этом уравнении коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и конца, одинаковы. Возвратное уравнение не имеет корня, равного нулю. Если же оно имеет корень x_1, то оно имеет и корень $\frac{1}{x_1}$. Возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $x=-1$, и если его разделить на $x+1$, то получится возвратное уравнение четной степени, на единицу меньшей степени данного уравнения. Возвратное уравнение четной степени с помощью подстановки $y=x+\frac{1}{x}$ можно привести к уравнению степени, в два раза меньшей, чем степень исходного. Для этого делят все члены данного уравнения на $x^{\frac{n}{2}}$ и группируют попарно

члены, равноотстоящие от начала и конца. После этого делают замену по формулам:

$$x+\frac{1}{x}=y,\ x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,\ x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y \text{ и т. д.}$$

Алгебраическое уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0 \qquad (*)$$

общего вида мы сможем решить, если сумеем разложить его левую часть на произведение таких множителей, что, приравняв каждый множитель нулю, придем к уравнениям, решение которых известно.

Сформулируем некоторые теоремы, полезные при решении алгебраического уравнения (*) с вещественными коэффициентами:

1) уравнение нечетной степени имеет вещественный корень;

2) целые корни уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена уравнения;

3) если уравнение имеет целые коэффициенты и коэффициент при высшей степени равен единице, то рациональными корнями такого уравнения могут быть только целые числа;

4) если уравнение с рациональными коэффициентами имеет корень вида $a+b\sqrt{c}$, где a, b и c — рациональные числа, причем $b\neq 0$, $c\neq 0$ и c не является квадратом рационального числа, то оно имеет и корень $a-b\sqrt{c}$ (см. п. 58, пример 127);

5) если уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень $a+bi$, где $b\neq 0$, то оно имеет и сопряженный ему корень $a-bi$ (см. п. 35, пример 22).

Пример 125. Решить уравнение

$$x^5+1=0.$$

Решение. Это двучленное уравнение можно записать так: $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=0$. Приравнивая первый множитель нулю, получим корень $x_0=-1$. Приравнивая второй множитель нулю, придем к возвратному уравнению. Разделим все члены последнего на x^2 и сгруппируем члены, равноотстоящие от конца и начала. Получим

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

Положив здесь $x+\frac{1}{x}=y$ и $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, придем к квадратному уравнению $y^2-y-1=0$. Его корни: $y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Для определения значений x получим тоже квадратные уравнения:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

или

$$2x^2-(1+\sqrt{5})x+2=0 \text{ и } 2x^2-(1-\sqrt{5})x+2=0.$$

Решив их, найдем еще четыре корня данного уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \text{ и } x_{3,4}=\frac{1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Пример 126. Определить m так, чтобы уравнение

$$(m-2)x^4-2(m+3)x^2+(m-1)=0$$

имело четыре вещественных корня, отличных от нуля.

Решение. Данное уравнение биквадратное, т. е. квадратное относительно x^2. Следовательно, для вещественности его корней необходимо и достаточно, чтобы их квадраты были положительны, т. е. чтобы квадратное уравнение $(m-2)y^2-2(m+3)y+(m-1)=0$ имело положительные корни. Для этого должно быть выполнено дискриминант $d\geqslant 0$, $y_1+y_2>0$, $y_1y_2>0$ или $(m+3)^2-(m-2)(m-1)=9m+7\geqslant 0$,

$$\frac{2(m+3)}{m-2}>0, \frac{m-1}{m-2}>0.$$

Первое неравенство справедливо при $m\geqslant -\frac{7}{9}$. Второе возможно лишь при $m<-3$ и $m>2$. Наконец, третье будет иметь место при $m<1$ и $m>2$. Поэтому вопрос сводится к рассмотрению следующих трех систем: 1) $m\geqslant -\frac{7}{9}$, $m<-3$, $m<1$; 2) $m\geqslant -\frac{7}{9}$, $m>2$, $m<1$; 3) $m\geqslant -\frac{7}{9}$, $m>2$, $m>2$. Нетрудно видеть, что первые две из них — противоречивы, а третья имеет решениями числа $m>2$, которые и являются решениями данной задачи.

Пример 127. Доказать, что если алгебраическое уравнение с рациональными коэффициентами имеет корень $a+b\sqrt{c}$, где a, b и c — рациональные числа, b и c отличны от нуля и c не равно квадрату рационального числа, то это уравнение имеет и корень $a-b\sqrt{c}$.

Решение. Пусть уравнение имеет вид $P(x)=0$. Выполним деление с остатком многочлена $P(x)$ на произведение $(x-a-b\sqrt{c})(x-a+b\sqrt{c})=(x-a)^2-b^2c$. Пусть неполное частное будет $Q(x)$ и остаток $Ax+B$, где A и B — рациональные числа. Тогда можно написать

$$P(x)=Q(x)[(x-a)^2-b^2c]+Ax+B. \qquad (*)$$

Так как $x = a + b\sqrt{c}$ есть корень $P(x)$, то, положив в равенстве (*) $x = a + b\sqrt{c}$, получим

$$0 = Q(x) \cdot 0 + A(a + b\sqrt{c}) + B$$

или

$$Aa + B + Ab\sqrt{c} = 0.$$

Но левая часть последнего равенства есть сумма рационального числа $Aa + B$ и иррационального числа $Ab\sqrt{c}$. Эта сумма будет равна нулю тогда и только тогда, когда $Ab\sqrt{c} = 0$ и $Aa + B = 0$. Так как $b \neq 0$ и $c \neq 0$, то из первого находим, что $A = 0$, а затем из второго $B = 0$. Если теперь в равенстве (*) положить $x = a - b\sqrt{c}$, то получим $P(a - b\sqrt{c}) = 0$. А это и значит, что $x = a - b\sqrt{c}$ есть корень рассматриваемого уравнения.

Пример 128. Составить трехчленное уравнение восьмой степени с рациональными коэффициентами, один из корней которого $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Решение. Уравнение должно иметь вид $ax^8 + bx^4 + c = 0$, т. е. быть квадратным относительно $y = x^4$. Это значит, что уравнение $ay^2 + by + c = 0$ имеет корень $y_1 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4 = (5 - 2\sqrt{6})^2 = 49 - 20\sqrt{6}$. Но ввиду рациональности a, b и c уравнение должно иметь и корень $y_2 = 49 + 20\sqrt{6}$. Пользуясь теоремой Виета, получим для y уравнение $y^2 - 98y + 1 = 0$. Искомое уравнение будет такое: $x^8 - 98x^4 + 1 = 0$.

Пример 129. Решить уравнение

$$x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0.$$

Решение. Уравнение нечетной степени имеет хотя бы один вещественный корень. Если этот корень рациональный, то он будет непременно целым и будет содержаться среди делителей свободного члена -2. Эти делители: ± 1, ± 2. Испытанием делителей убеждаемся, что уравнение имеет корень $x_1 = 2$. Чтобы выделить частное от деления левой части на $x - 2$ можно воспользоваться схемой Горнера, но здесь проще разлагать на множители, поскольку известно, что нужно вынести за скобку $x - 2$. Получим

$$(x^5 - 2x^4) + (2x^4 - 4x^3) + (2x^3 - 4x) + (x - 2) = 0$$

или

$$(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 2x + 1) = 0.$$

Приравняв второй множитель нулю, придем к возвратному уравнению. Решая его обычным способом, найдем:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=0;\ y^2+2y-2=0;\ y=-1\pm\sqrt{3},$$

где $y=x+\frac{1}{x}$.

Отсюда

$$x^2+\left(\sqrt{3}+1\right)x+1=0 \text{ и } x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x+1=0;$$

$$x_{2,3}=\frac{-(1+\sqrt{3})\pm\sqrt{4+2\sqrt{3}-4}}{2}=\frac{-(1+\sqrt{3})\pm\sqrt[4]{12}}{2};$$

$$x_{4,5}=\frac{\sqrt{3}-1\pm i\sqrt[4]{12}}{2}.$$

Пример 130. Решить уравнение

$$x^4+4x^3-18x^2-12x+9=0.$$

Решение. Разделим все члены уравнения на x^2 и сгруппируем попарно члены, равноотстоящие от концов. Получим

$$\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)+4\left(x-\frac{3}{x}\right)-18=0.$$

Положим $x-\frac{3}{x}=y$. Тогда $\left(x-\frac{3}{x}\right)^2=y^2$, $x^2-6+\frac{9}{x^2}=y^2$, $x^2+\frac{9}{x^2}=y^2+6$, и уравнение приведется к такому:

$$y^2+4y-12=0.$$

Из него находим: $y_1=2$, $y_2=-6$. Следовательно, получим два уравнения:

$$x-\frac{3}{x}=2 \text{ и } x-\frac{3}{x}=-6.$$

Решаем первое:

$$x^2-2x-3=0,\ x=1\pm\sqrt{4};\ x_1=3,\ x_2=-1.$$

Решаем второе:

$$x^2+6x-3=0,\ x=-3\pm\sqrt{12};\ x_3=-3+2\sqrt{3},$$

$$x_4=-3-2\sqrt{3}.$$

Замечание. Данное уравнение относится к обобщенным возвратным уравнениям четной степени. Так называется уравнение вида $a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_nx^n+ka_{n-1}x^{n-1}+k^2a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+k^na_0=0$. В рассматриваемом случае $n=2$ и $k=-3$. Степень такого уравнения можно понизить на n единиц, если разделить обе части уравнения на x^n, объединить попарно члены, равноотстоящие от концов, и положить $x+\frac{k}{x}=y$.

Есть также обобщенные возвратные уравнения нечетной степени. Это уравнение вида

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots+a_nx^{n+1}+ka_nx^n+k^2a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+k^{2n+1}a_0=0.$$

Обобщенное возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $x = -k$. Если его левую часть разделить на $x + k$ и полученное частное приравнять нулю, то новое уравнение будет обобщенным возвратным уравнением четной степени

Пример 131. Решить уравнение

$$32x^4 - 48x^3 - 10x^2 + 21x + 5 = 0.$$

Решение. Выполним следующие преобразования:

$$2(16x^4 - 24x^3 + 9x^2 - 9x^2) - 10x^2 + 21x + 5 = 0;$$
$$2(4x^2 - 3x)^2 - 18x^2 - 10x^2 + 21x + 5 = 0;$$
$$2(4x^2 - 3x)^2 - 28x^2 + 21x + 5 = 0;$$
$$2(4x^2 - 3x)^2 - 7(4x^2 - 3x) + 5 = 0.$$

Полученное уравнение есть квадратное уравнение относительно $4x^2 - 3x$. Из него находим:

$$4x^2 - 3x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4}; \quad 4x^2 - 3x = \frac{7 \pm 3}{4}.$$

Итак,

$$4x^2 - 3x = \frac{5}{2}; \quad 4x^2 - 3x = 1.$$

Решив эти квадратные уравнения, получим.

$$x_1 = \frac{5}{4}; \quad x_2 = -\frac{1}{2}; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -\frac{1}{4}.$$

59. В этом пункте приведены примеры решеиий систем алгебраических уравнений (целых и дробных). В школьном курсе рассматриваются лишь частные приемы решений некоторых таких систем, и эти приемы общеизвестны. Но даже когда какой-либо из таких приемов применим, он далеко ие всегда является наилучшим из возможных. Поэтому очень важно научиться подмечать конкретные особениости каждого примера, чтобы использовать их для отыскаиия способа решения системы. Конечно, для этого нужно возможно больше тренироваться на решении задач такого рода.

Пример 132. Решить систему

$$xy = x^2y^2; \quad 3(x^2y + xy^2) = 5(x - y).$$

Решение. Перепишем систему так: $xy(xy - 1) = 0$; $3xy(x + y) = 5(x - y)$. Она эквивалентна следующим двум: 1) $xy = 0$, $3xy(x + y) = 5(x - y)$ или $xy = 0$, $x - y = 0$; 2) $xy = 1$, $3xy(x + y) = 5(x - y)$ или $xy = 1$, $x - 4y = 0$. Из первой системы находим $x_1 = y_1 = 0$. Подставляя $x = 4y$, найденный из второго уравнения второй системы, в уравнение $xy = 1$, получим: $4y^2 = 1$, $y = \pm\frac{1}{2}$. Поэтому решения системы будут следующие:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 2, \quad y_2 = \frac{1}{2}; \quad x_3 = -2, \quad y_3 = -\frac{1}{2}.$$

Пример 133. Решить систему

$$x^2 + xy = 6;\ x^2 + y^2 = 5.$$

Решение. Левые части уравнений являются однородными многочленами второго измерения, т. е. многочленами, все члены которых второй степени. Для таких систем существует общий метод решения. Применим его к данной системе. Для этого умножим первое уравнение на 5, второе на 6 и приравняем левые части. Получим: $5(x^2 + xy) = 6(x^2 + y^2)$, $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$. Так как $y \neq 0$ (это видно из уравнений системы), то, разделив последнее уравнение на y^2 и положив затем $\frac{x}{y} = t$, придем к уравнению $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x}{y} + 6 = 0$ или $t^2 - 5t + 6 = 0$. Корни его $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Отсюда $x = 2y$ и $x = 3y$. Подставляя $x = 2y$ в первое уравнение системы, получим: $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. Подставляя $x = 3y$ в то же уравнение, найдем: $y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Из уравнения $x = 2y$ получим: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, а из уравнения $x = 3y$ определяется $x_3 = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $x_4 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Пример 134. Решить систему

$$x^2 + 3xy = 54;\ xy + 4y^2 = 115.$$

Решение. Эту систему можно решить тем же методом, что и предыдущую (пример 133). Но здесь лучше поступить иначе. Сложим уравнения. Получим $(x + 2y)^2 = 169$. Система $xy + 4y^2 = 115$; $(x + 2y)^2 = 169$ эквивалентна данной (см. упражнение 139). Ее можно представить так: $xy + 4y^2 = 115$; $x + 2y = \pm 13$. Подставив $x = \pm 13 - 2y$ в первое уравнение, придем к квадратным уравнениям: $2y^2 + 13y - 115 = 0$ и $2y^2 - 13y - 115 = 0$. Корни их такие: $y_1 = 5$, $y_2 = -\frac{23}{2}$ и $y_3 = -5$, $y_4 = \frac{23}{2}$. С помощью этих корней и уравнений $x = 13 - 2y$ и $x = -13 - 2y$ найдем соответствующие x. Именно $x_1 = 3$, $x_2 = 36$ и $x_3 = -3$, $x_4 = -36$. Все эти решения преобразованной системы являются решениями данной, так как данная и преобразованная системы эквивалентны.

Пример 135. Решить систему

$$x^2 + y^2 + 3xy - 4(x + y) + 3 = 0;\ xy + 2(x + y) - 5 = 0.$$

Решение. Из первого уравнения вычтем второе. Получим

$$x^2 + y^2 + 2xy - 6(x + y) + 8 = 0$$

или

$$(x + y)^2 - 6(x + y) + 8 = 0.$$

Рассматривая полученное уравнение как квадратное относительно $x+y$, найдем:

$$x+y=3\pm 1;\ x+y=2;\ x+y=4.$$

Подставив найденные значения $x+y$ во второе уравнение, получим для xy соответственно два значения:

$$xy=1 \text{ и } xy=-3.$$

Итак, решение данной системы свелось к решению следующих двух систем:

$$1)\ x+y=2,\ xy=1 \text{ и } 2)\ x+y=4,\ xy=-3.$$

Чтобы решить, например, первую из них, можно воспользоваться теоремой Виета или методом подстановки. Так же решается и вторая система. Первая имеет единственное решение: $x=y=1$, а у второй их два: $x=2\pm\sqrt{7}$, $y=2\mp\sqrt{7}$.

Таким образом, данная система имеет три решения: $x_1=1$, $y_1=1$; $x_2=2+\sqrt{7}$, $y_2=2-\sqrt{7}$; $x_3=2-\sqrt{7}$, $y_3=2+\sqrt{7}$.

Пример 136. Найти вещественные решения системы

$$(x^2+y^2)(x-y)=447;\ xy(x-y)=210.$$

Решение. Так как $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$, то, обозначив $x-y=u$, $xy=v$, сможем записать систему так: $(u^2+2v)u=447$, $uv=210$ или $u^3+420=447$, $uv=210$. Отсюда $u^3=27$, $u=3$, $v=70$ или $x-y=3$, $xy=70$.

Подставляя $x=3+y$ во второе уравнение, найдем: $y^2+3y-70=0$, $y_1=7$, $y_2=-10$, а из уравнения $x=3+y$ получим $x_1=10$, $x_2=-7$.

Пример 137. Решить систему

$$x^2+y^2+z^2=35;\ 2y^2+3x-7xz=-14;\ x(z-1)=4.$$

Решение. Умножим первое уравнение на 2, второе на -1, третье на -3 и результаты сложим. Получим: $2x^2+2z^2+4xz=72$; $(x+z)^2=36$; $x+z=\pm 6$. Данная система равносильна следующей:

$$x+z=\pm 6;\ 2y^2+3x-7xz=-14;\ x(z-1)=4.$$

Действительно, каждое решение первой (данной) системы является решением второй, так как второе и третье уравнения у них общие, а первое уравнение второй есть следствие уравнений данной. Каждое решение второй системы есть решение данной, так как первое уравнение данной системы есть следствие уравнений второй системы, а остальные уравнения одинаковы.

Решаем систему уравнений $x+z=\pm 6$, $xz-x=4$. Подставляем $z=\pm 6-x$ во второе уравнение. Получаем: $x(\pm 6-x)-x=4$; $x^2-5x+4=0$ и $x^2+7x+4=0$. Отсюда $x_1=1$, $x_2=4$, $x_{3,4}=\dfrac{-7\pm\sqrt{33}}{2}$. С помощью этих значений x

и уравнений $z = 6 - x$ и $z = -6 - x$ найдем: $z_1 = 5$, $z_2 = 2$, $z_{3,4} = \frac{-5 \mp \sqrt{33}}{2}$. Из второго и третьего уравнений системы найдем, что $y^3 = 2x + 7$. Отсюда

$$y_1 = \pm 3, \quad y_2 = \pm \sqrt{15}, \quad y_3 = \pm \sqrt[4]{33}, \quad y_4 = \pm i\sqrt[4]{33}.$$

Таким образом, система имеет следующие восемь решений:

Решение	k							
	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	1	4	$\frac{-7+\sqrt{33}}{2}$	$\frac{-7-\sqrt{33}}{2}$	1	4	$\frac{-7+\sqrt{33}}{2}$	$\frac{-7-\sqrt{33}}{2}$
y_k	3	$\sqrt{15}$	$\sqrt[4]{33}$	$i\sqrt[4]{33}$	-3	$-\sqrt{15}$	$-\sqrt[4]{33}$	$-i\sqrt[4]{33}$
z_k	5	2	$\frac{-5-\sqrt{33}}{2}$	$\frac{-5+\sqrt{33}}{2}$	5	2	$\frac{-5-\sqrt{33}}{2}$	$\frac{-5+\sqrt{33}}{2}$

Пример 138. Решить систему

$$x + y + z = 9; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1; \quad xy + xz + yz = 27.$$

Решение. Так как x, y и z не равны нулю, то, умножив второе уравнение на xyz, получим уравнение $yz + zx + xy = xyz$, равносильное второму. Поэтому, используя третье уравнение, получим следующую систему, равносильную данной: $x + y + z = 9$; $xyz = 27$; $xy + yz + zx = 27$. Умножим третье уравнение на $x \neq 0$. Это даст уравнение $x^2(y + z) + xyz = 27x$, равносильное третьему, так что система $x + y + z = 9$; $xyz = 27$; $x^2(y + z) + xyz = 27x$ равносильна данной. Подставляя в третье уравнение $y + z = 9 - x$ и $xyz = 27$, получим: $x^2(9 - x) + 27 = 27x$, $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$, $(x - 3)^3 = 0$, $x = 3$. Но тогда $y + z = 6$, $yz = 9$. Решая эту систему, найдем $y = z = 3$.

Пример 139. Решить систему

$$\frac{xy}{ay + bx} = \frac{yz}{bz + cy} = \frac{zx}{cx + az} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

где a, b и c — вещественные числа.

Решение. Из системы видно, что ни одно из неизвестных не может быть равно нулю. Действительно, если бы было $x = 0$, то тогда было бы $yz = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, а это значит, что все неизвестные должны быть равны нулю. Но это невозможно, потому что при $x = y = z = 0$ отношения, входящие в систему,

теряют смысл. Поэтому данная система будет эквивалентна той, которая получится из нее, если заменить все отношения обратными величинами. Эта система имеет вид

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Заметим, что ни одно из чисел a, b и c не равно иулю. Действительно, если $a=0$, то из последней системы получим $\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}$, откуда следует: $b=0$ и $c=0$. Но этого быть не может, так как при $a=b=c=0$ отношения, входящие в систему, теряют смысл.

Сложим все уравнения новой системы, разделим на 2 и вычтем поочередно первое ее уравнение, второе и третье:

$$\frac{c}{z}=\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}u \qquad (*)$$

или

$$\frac{c^2}{z^2}=\frac{a^2}{x^2}=\frac{b^2}{y^2}=\frac{u^2}{4}. \qquad (**)$$

С другой стороны, согласно свойству равных отношений, можно написать

$$\frac{c^2}{z^2}=\frac{a^2}{x^2}=\frac{b^2}{y^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}=u.$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (**), видим, что $\frac{1}{4}u^2=u$, откуда $u_1=0$, $u_2=4$. Но u не может быть равно нулю, так как $a^2+b^2+c^2\neq 0$, поэтому имеем лишь одно решение $u=4$. С помощью его из равенств (*) находим: $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$, $z=\frac{c}{2}$. При найденных значениях неизвестных ни один из знаменателей дробей, входящих в данную систему, не обращается в нуль. Значения $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$, $z=\frac{c}{2}$ дают решение данной системы. Оно единственное.

60. Иррациональные уравнения обычно решают способом исключения радикалов. Для этого возводят обе части уравнения в некоторую степень с таким расчетом, чтобы уравнение стало рациональным. Иногда такую операцию приходится применять несколько раз. Получающееся в результате этого алгебраическое уравнение (целое или дробное), вообще говоря, не будет эквивалентно данному, но всегда будет следствием его. Поэтому, найдя решения полученного уравнения, нужно произвести проверку решений путем подстановки в данное уравнение и отбросить те из них, как посторонние, которые не будут ему удовлетворять. Однако если возведение обеих частей уравнения производилось лишь в нечетную степень, то новое уравнение будет эквивалентно исходному (см. пример 100, б).

Допустимыми значениями для неизвестных считаются только вещественные числа, причем такие, что подкоренные выражения радикалов четной степени неотрицательны и ни один из делителей выражений, входящих в уравнение, не обращается в нуль. При этом значение корня четной степени берется арифметическое, а нечетной — его единственное вещественное (положительное или отрицательное).

Исходя из сказанного, можно утверждать, что следующие пары уравнений, вообще говоря, не эквивалентны:

$$1)\ \sqrt{A}=\sqrt{B}\ \text{и}\ A=B;$$

$$2)\ \sqrt{A}\sqrt{B}=C\ \text{и}\ \sqrt{AB}=C;$$

$$3)\ \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=C\ \text{и}\ \sqrt{\frac{A}{B}}=C.$$

Действительно, то решение любого из вторых уравнений, для которого $A<0$ и одновременно $B<0$, не будет решением соответствующего первого.

Пример 140. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{7x^2+8}+\sqrt{2x^2-3x+2}=0.$$

Решение. $\sqrt{2x^2+3x+2}+\sqrt{2x^2-3x+2}=\sqrt{7x^2+8}$. Все подкоренные выражения трех радикалов положительны, так как дискриминанты их отрицательны, а коэффициенты при старших членах положительны. Кроме того, в обеих частях равенства находятся положительные величины (корни считаются арифметическими). Поэтому возведение равенства в квадрат приведет к уравнению, равносильному данному (см. п. 12, пример 4). Это уравнение будет такое: $4x^2+2\sqrt{(2x^2+2)^2-9x^2}+4=7x^2+8$ или $2\sqrt{4x^4-x^2+4}=3x^2+4$. По той же причине возведение этого уравнения в квадрат снова приведет к уравнению, равносильному данному. В результате вторичного возведения получим: $4(4x^4-x^2+4)=9x^4+24x^2+16$, $7x^4-28x^2=0$; $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$. Так как эти значения неизвестного получены из уравнения, эквивалентного данному, то все они являются решениями данного уравнения и в проверке не нуждаются.

Пример 141. Решить уравнение

$$2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9}=30.$$

Решение. Положим $\sqrt{2x^2+3x+9}=y\geqslant 0$. Тогда $2x^2+3x+9=y^2$, $2x^2+3x=y^2-9$, и данное уравнение примет вид $y^2+y-42=0$. Его решения: $y_1=-7$ и $y_2=6$. Первое должно быть отброшено, так как $y\geqslant 0$. Второе даст $\sqrt{2x^2+3x+9}=6$. Возведя его в квадрат, получим уравнение $2x^2+3x+9=36$, равносильное данному, потому, что подкорен-

ное выражение и обе части равенства, возведенного в квадрат, положительны. Поэтому его корни $x_1 = 3$ и $x_2 = -\frac{9}{2}$ являются кориями данного. И в этом случае проверку делать не требуется.

Пример 142. Решить уравнение

$$\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} - x^2 + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} = 0.$$

Решение. Уравнение решаем методом исключения радикалов, положив предварительно $x^2 = y$:

$$\sqrt{12 - \frac{12}{y}} - y + \sqrt{y - \frac{12}{y}} = 0; \qquad (*)$$

$$\left(\sqrt{12 - \frac{12}{y}}\right)^2 = \left(y - \sqrt{y - \frac{12}{y}}\right)^2; \quad 12 - \frac{12}{y} =$$

$$= y^2 - 2y\sqrt{y - \frac{12}{y}} + y - \frac{12}{y}; y^2 - 12 - 2y\sqrt{y - \frac{12}{y}} + y = 0;$$

$$y - \frac{12}{y} - 2\sqrt{y - \frac{12}{y}} + 1 = 0; \left(\sqrt{y - \frac{12}{y}} - 1\right)^2 = 0;$$

$$\sqrt{y - \frac{12}{y}} - 1 = 0; \sqrt{y - \frac{12}{y}} = 1; y - \frac{12}{y} = 1;$$

$$y^2 - y - 12 = 0; y_1 = 4, y_2 = -3.$$

Подстановка y_1 и y_2 в уравнение (*) показывает, что y_2 — посторонний для него корень, и, таким образом, остается только $y = 4$. Поэтому для данного уравиения получим: $x^2 = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Пример 143. Решить уравиение

$$(x - a)\sqrt{x} - (x + a)\sqrt{b} = b(\sqrt{x} - \sqrt{b}).$$

Решение. Раскрываем скобки в левой части уравиения, переносим все члены в одну сторону и представляем полученное выражение в виде произведения:

$$x\sqrt{x} - a\sqrt{x} - x\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b(\sqrt{x} - \sqrt{b}) = 0;$$

$$x(\sqrt{x} - \sqrt{b}) - a(\sqrt{x} + \sqrt{b}) - b(\sqrt{x} - \sqrt{b}) = 0;$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{b})(x - b) - a(\sqrt{x} + \sqrt{b}) = 0;$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{b})^2(\sqrt{x} + \sqrt{b}) - a(\sqrt{x} + \sqrt{b}) = 0;$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{b})[(\sqrt{x} - \sqrt{b})^2 - a] = 0.$$

Но $\sqrt{x} + \sqrt{b} \neq 0$, если $b > 0$, так как корни предполагаются арифметическими. Если же $b = 0$, то получим $x = 0$. Разделив последнее уравнение на $\sqrt{x} + \sqrt{b}$, получим

$$(\sqrt{x} - \sqrt{b})^2 - a = 0 \text{ или } (\sqrt{x} - \sqrt{b})^2 = a.$$

Если $a < 0$, то уравнение

$$(\sqrt{x} - \sqrt{b})^2 = a$$

не имеет решений. Если же $a \geqslant 0$, то получим

$$\sqrt{x} - \sqrt{b} = \pm \sqrt{a},\ \sqrt{x} = \sqrt{b} \pm \sqrt{a},\ x = (\sqrt{b} \pm \sqrt{a})^2.$$

Итак, если $a < 0$, а $b > 0$, то уравнение не имеет решений. Если $a > 0$ и $b > 0$, то уравнение имеет два решения: $x_{1,2} = (\sqrt{b} \pm \sqrt{a})^2$; если $b = 0$ и $a > 0$ — тоже два решения: $x_1 = 0$, $x_2 = a$. Во всех прочих случаях решение будет одно: $x = 0$, если $b = 0$, $a \leqslant 0$; $x = b$, если $a = 0$, но $b > 0$. Отрицательным b не может быть, так как в уравнении есть $\sqrt{b}$.

Пример 144. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 34x + 37} - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 34x - 37} = 2.$$

Решение. Обозначим первый корень в левой части данного уравнения буквой y, а второй — буквой z. Тогда уравнение запишется так:

$$y - z = 2.$$

Возведем обе части его в куб. Это даст

$$y^3 - 3yz(y - z) - z^3 = 8. \qquad (*)$$

Но $y^3 - z^3 = (x^3 + 3x^2 + 34x + 37) - (x^3 - 3x^2 + 34x - 37) = 6x^2 + 74$, а $yz = \sqrt[3]{(x^3 + 34x)^2 - (3x^2 + 37)^2}$ и уравнение (*) примет вид

$$6x^2 + 74 - 6\sqrt[3]{(x^3 + 34x)^2 - (3x^2 + 37)^2} = 8$$

или

$$\sqrt[3]{(x^3 + 34x)^2 - (3x^2 + 37)^2} = x^2 + 11.$$

Возведем обе части этого уравнения в куб и раскроем скобки. Получим уравнение

$$(x^6 + 68x^4 + 1156x^2) - (9x^4 + 222x^2 + 1369) = x^6 + 33x^4 + 363x^2 + 1331,$$

которое приводится к следующему биквадратному:

$$26x^4 + 571x^2 - 2700 = 0.$$

Из него находим

$$x^2 = \frac{-571 \pm \sqrt{571^2 + 4 \cdot 26 \cdot 2700}}{52} = \frac{-571 \pm \sqrt{60684}}{52} = \frac{-571 \pm 779}{52}$$

или

$$x^2 = 4, \quad x^2 = -\frac{625}{26}$$

Второе значение x^2 даст мнимость для подкоренных выражений данного уравнения и потому должно быть отброшено, как постороннее.

Итак, искомые корни $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Пример 145. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Решение. Здесь должно быть $x>1$. Положим $\sqrt{x-1}=y\geqslant 0$. Тогда $x=y^2+1$, и уравнение можно записать так:

$$\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{y^2-6y+9}=1$$

или

$$\sqrt{(y-2)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=1$$

или, наконец, так:

$$|y-2|+|y-3|=1.$$

Но для того чтобы сумма двух неотрицательных чисел была равна единице, необходимо, чтобы каждое из этих чисел не превосходило единицу, т. е. чтобы совместно выполнялись неравенства:

$$|y-2|\leqslant 1 \text{ и } |y-3|\leqslant 1.$$

Если же $|A|<B$, то $-B<A<B$, и последняя система эквивалентна такой:

$$-1\leqslant y-2\leqslant 1,\ -1\leqslant y-3\leqslant 1.$$

Из нее находим, что должны совместно выполняться неравенства $1\leqslant y\leqslant 3$ и $2\leqslant y\leqslant 4$, что будет тогда, когда $2\leqslant y\leqslant 3$. В этой области уравнение переходит в тождество, так как $y-2+3-y=1$. Итак, должно быть:

$$2\leqslant y\leqslant 3,\ 2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3,\ 4\leqslant x-1\leqslant 9,\ 5\leqslant x\leqslant 10.$$

Уравнение имеет бесконечное множество решений.

Пример 146. Решить уравнение

$$\sqrt[n]{(1+x)^2}-\sqrt[n]{1-x^2}=\sqrt[n]{(1-x)^2}.$$

Решение. Разделим уравнение на $\sqrt[n]{(1+x)^2}\neq 0$. Получим $1-\sqrt[n]{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt[n]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$. Если положить $y=\sqrt[n]{\frac{1-x}{1+x}}$, то уравнение примет вид $y^2+y-1=0$. Корни его будут такими: $y_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $y_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. При n четном первый корень, как отрицательный, нужно отбросить. В этом случае получим: $\sqrt[n]{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{1-x}{1+x}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$, $(1-x)2^n=(1+x)(\sqrt{5}-1)^n$, $x=\frac{2^n-(\sqrt{5}-1)^n}{2^n+(\sqrt{5}-1)^n}$, причем $0<x<1$.

Полученное решение не нуждается в проверке, так как уравнения $\sqrt[n]{A}=C\geqslant 0$ и $A=C^n$, очевидно, равносильны (в области вещественных чисел). В данном случае мы именно так перешли от иррационального уравнения $\sqrt[n]{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ к соответствующему рациональному.

Если n нечетное, то используем оба корня y_1 и y_2. Тогда из равенства $\sqrt[n]{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ найдем два решения:

$$x_{1,2} = \frac{2^n - (-1 \pm \sqrt{5})^n}{2^n + (-1 \pm \sqrt{5})^n}.$$

Пример 147. Решить уравнение

$$a^2b^2 \sqrt[n]{x} - 4ab \sqrt{ab} \sqrt[2mn]{x^{m+n}} = (a-b)^2 \sqrt[m]{x},$$

где $m \neq n$.

Решение. Так как $\sqrt{ab}$ арифметический, то должно быть $ab \geqslant 0$. При $a = 0$ или $b = 0$ уравнение принимает вид

$$(a-b)^2 \sqrt[m]{x} = 0.$$

В этом случае уравнение имеет единственное решение $x = 0$. Случай $a = b = 0$ не представляет интереса, и поэтому в дальнейшем будем считать $ab > 0$. Очевидно, $x = 0$ будет корнем уравнения и в этом случае. Считая теперь $x \neq 0$, разделим обе части данного уравнения на $\sqrt[m]{x}$. Тогда получим

$$a^2b^2 \sqrt[mn]{x^{m-n}} - 4ab\sqrt{ab} \sqrt[2mn]{x^{m-n}} = (a-b)^2.$$

Положив $\sqrt[2mn]{x^{m-n}} = y > 0$, придем к следующему квадратному уравнению:

$$a^2b^2y^2 - 4ab \sqrt{aby} - (a-b)^2 = 0,$$

которое при условии $x \neq 0$ эквивалентно данному.

Из него находим:

$$y = \frac{2ab\sqrt{ab} \pm \sqrt{4a^3b^3 + a^2b^2(a-b)^2}}{a^2b^2} = \frac{2ab\sqrt{ab} \pm ab\sqrt{4ab + (a-b)^2}}{a^2b^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{ab} \pm \sqrt{(a+b)^2}}{ab} = \frac{2\sqrt{ab} \pm (a+b)}{ab}; \quad y_1 = \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{ab};$$

$$y_2 = -\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{ab}.$$

Так как $y > 0$, то при y_1 нужно считать $a > 0$ и $b > 0$, а при y_2, наоборот, $a < 0$ и $b < 0$. Тогда

$$y_1 = \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\right)^2 = \left(a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right)^2$$

и

$$y_2 = \left(\frac{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}{\sqrt{ab}}\right)^2 = \left[(-a)^{-\frac{1}{2}} + (-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^2.$$

Таким образом, учитывая, что $y = \sqrt[2mn]{x^{m-n}}$, получаем следующие решения данного уравнения.

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = \left(a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4mn}{m-n}},$$

если $a>0$ и $b>0$;

$$x_1=0 \quad \text{и} \quad x_2=\left[(-a)^{-\frac{1}{2}}+(-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{4mn}{m-n}},$$

если $a<0$ и $b<0$.

Их можно объединить:

$$x_1=0 \text{ и } x_2=\left[|a|^{-\frac{1}{2}}+|b|^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{4mn}{m-n}},$$

при этом должно быть $ab>0$.

Замечание. Если $a>0$, $b>0$ и $a\neq b$, то значение y_2 отрицательное, потому что

$$-\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{ab}=-\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{ab}.$$

При $a=b$ получим $y_2=0$ и $x=0$. Но нулевой корень уже учтен ранее. Аналогично можно показать отрицательность y_1 при $a<0$, $b<0$ и $a\neq b$.

Пример 148. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}.$$

Решение. Здесь n — любое натуральное число, большее единицы. Если n четное, то $x>0$, $a+x>0$. Для n нечетного эти ограничения налагать не требуется. Числа a, b и x не равны нулю.

Вынесем слева за скобки $\sqrt[n]{a+x}$. Получим

$$\sqrt[n]{a+x}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}.$$

Отсюда

$$\sqrt[n]{a+x}\cdot\frac{a+x}{ax}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b};\quad \sqrt[n]{\left(\frac{a+x}{x}\right)^{n+1}}=\frac{a}{b}.$$

Здесь левая часть больше нуля, следовательно, и правая часть должна быть больше нуля, т. е. $\frac{a}{b}>0$. Далее,

$$\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{n+1}{n}}=\frac{a}{b};\quad \frac{a+x}{x}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}};\quad \frac{a}{x}+1=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}};$$

$$\frac{a}{x}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1;\quad a=\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1\right]x.$$

Если $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1\neq 0$, т. е. если $a\neq b$, то отсюда найдем

$$x=\frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1}. \qquad (*)$$

Из этого выражения и из того, что $\frac{a}{b} > 0$, видно, что для положительности x и $a + x = x\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ должно выполняться: 1) $a > 0$ и $\frac{a}{b} > 1$ или 2) $a < 0$ и $\frac{a}{b} < 1$. Первое будет иметь место при $a > b > 0$, а второе — при $0 > a > b$. Итак, уравнение имеет решение при четном n, которое задается формулой (*), если $a > b > 0$ или $0 > a > b$. Эта же формула (*) дает решение и при нечетном n. Однако в этом случае числа a и b могут быть любыми, неравными между собой и одного знака, а символу $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ приписывается два значения: $\pm\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^n}$. При иных соотношениях между a и b уравнение не имеет решения.

Пример 149. Решить систему

$$\sqrt{\frac{y+1}{x-y}} + 2\sqrt{\frac{x-y}{y+1}} = 3; \quad xy = 3.$$

Решение. Пусть $\sqrt{\frac{y+1}{x-y}} = z > 0$. Тогда первое уравнение можно записать так $z + \frac{2}{z} = 3$ или $z^2 - 3z + 2 = 0$. Решив его, найдем: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$. Следовательно, нужно рассмотреть две системы: 1) $\sqrt{\frac{y+1}{x-y}} = 1$, $xy = 3$; 2) $\sqrt{\frac{y+1}{x-y}} = 2$, $xy = 3$. Преобразуем первое уравнение первой системы: $\frac{y+1}{x-y} = 1$, $y + 1 = x - y$, $x = 2y + 1$. Подставляем значение x во второе уравнение. Получаем: $(2y + 1)y = 3$, $2y^2 + y - 3 = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{3}{2}$, а $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Поступая аналогично со второй системой, найдем: $x = \frac{5}{4}y + \frac{1}{4}$, $\left(\frac{5}{4}y + \frac{1}{4}\right)y = 3$, $5y^2 + y - 12 = 0$, $y_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{241}}{10}$. Подставляя в уравнение $x = \frac{5}{4}y + \frac{1}{4}$, найдем $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{241}}{8}$. Найденные четыре пары значений x и y являются решениями данной системы.

Пример 150. Решить систему

$$x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y}; \quad x^2 + y^2 = 34.$$

Решение. $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{|x+y|}$.

Если $|x + y| = x + y$, т. е. $x + y > 0$ (тогда и $x - y > 0$), то система эквивалентна такой: $x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} - 20 = 0$,

$x^2+y^2=34$. Положим $\sqrt{x^2-y^2}=z>0$. Тогда первое уравнение будет иметь вид $z^2+z-20=0$, и из него найдем: $z_1=4$, $z_2=-5$. Но $z_2=-5$, как отрицательное, нужно отбросить и тогда система приведется к такой: $\sqrt{x^2-y^2}=4$, $x^2+y^2=34$ или $x^2-y^2=16$, $x^2+y^2=34$. Решив ее, получим: $x=\pm 5$, $y=\pm 3$. Из них только $x_1=5$, $y_1=3$ и $x_2=5$, $y_2=-3$ являются решениями данной системы, а $x=-5$, $y=\pm 3$ нужно отбросить, так как при этих значениях $x+y<0$.

Если $|x+y|=-(x+y)$, т. е. если $x+y<0$ (тогда и $x-y<0$), то система будет иметь такой вид $x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}-20=0$, $x^2+y^2=34$. Решая ее так же, как предыдущую, получим $\sqrt{x^2-y^2}=5$, $x^2+y^2=34$ или $x^2-y^2=25$, $x^2+y^2=34$. Отсюда найдем. $x_3=-\sqrt{\frac{59}{2}}$, $y_3=\sqrt{\frac{9}{2}}$; $x_4=-\sqrt{\frac{59}{2}}$, $y_4=-\sqrt{\frac{9}{2}}$.

Пример 151. Решить систему

$$\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{17}{4};$$

$$x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52.$$

Решение. Приводим левую часть первого уравнения системы к общему знаменателю и затем умножаем обе части уравнения на y^2. Получим:

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-y^2})^2+(x-\sqrt{x^2-y^2})^2}{x^2-(\sqrt{x^2-y^2})^2}=\frac{17}{4};\quad \frac{2x^2+2x^2-2y^2}{x^2-x^2+y^2}=\frac{17}{4};$$

$$\frac{4x^2-2y^2}{y^2}=\frac{17}{4};\quad 4x^2-2y^2=\frac{17}{4}y^2;\quad 4x^2=\frac{25}{4}y^2;\quad y^2=\frac{16}{25}x^2.$$

Во втором уравнении положим $\sqrt{x^2+xy+4}=z>0$. Тогда $x(x+y)=x^2+xy=z^2-4$, и это уравнение примет вид

$$z^2+z-56=0.$$

Его корни $z_1=7$ и $z_2=-8$. Но так как $z>0$, то второй корень посторонний, и получим:

$$\sqrt{x^2+xy+4}=7;\quad x^2+xy+4=49;\quad x^2+xy-45=0.$$

Следовательно, данная система приводится к такой:

$$\left.\begin{aligned} y^2&=\frac{16}{25}x^2;\\ x^2+xy-45&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Из первого уравнения находим $y=\pm\frac{4}{5}x$. Подставив это значение y во второе уравнение системы (*), получим

$$x^2\pm\frac{4}{5}x^2-45=0,\quad 5x^2\pm 4x^2-225=0.$$

Отсюда $x^2 = 225$ и $x^2 = 25$, а $x = \pm 15$ и $x = \pm 5$. Из уравнения $y = -\frac{4}{5}x$ найдем $y = \mp 12$, а из уравнения $y = \frac{4}{5}x$ получим $y = \pm 4$.

Таким образом, система (*) имеет четыре решения.

$$x_1 = 15,\ y_1 = -12;\ x_2 = -15,\ y_2 = 12;\ x_3 = 5,\ y_3 = 4;$$
$$x_4 = -5,\ y_4 = -4.$$

Они же являются и решениями данной системы.

§ 3. Решение показательных и логарифмических уравнений

61. В элементарной алгебре рассматриваются решения некоторых трансцендентных уравнений (см. п. 51). Это уравнения, содержащие неизвестные в показателе степени и обычно называемые показательными, и уравнения, содержащие неизвестные под знаком логарифма и называемые логарифмическими. Однако методами элементарной математики могут быть решены лишь некоторые частные виды таких уравнений.

Простейшим показательным уравнением называется уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ Такое уравнение всегда имеет решение и притом единственное. Его можно записать так: $x = \log_a b$.

Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, b — любое вещественное число. Такое уравнение всегда имеет решение и притом единственное. Оно может быть записано так: $x = a^b$.

Кроме простейших уравнений, в школьном курсе рассматриваются главным образом такие показательные и логарифмические уравнения, которые каким-либо образом могут быть сведены к простейшим или имеют тип простейших, т. е представимы в виде $a^A = b$ и $\log_a A = b$, где A — выражение, содержащее неизвестные, причем решение уравнений $A = \log_a b$ и $A = a^b$ не вызывает затруднений.

При решении логарифмических и показательных уравнений иногда приходится потенцировать и логарифмировать обе части уравнения Указанные операции могут привести к уравнениям, не эквивалентным данным. Это следует иметь в виду, чтобы не потерять корни и не приобрести посторонние.

Так, если A и B являются выражениями, содержащими неизвестные, то следующие уравнения будут, вообще говоря, неэквивалентными:

1) $A = B$ и $\log A = \log B$;

2) $\log(AB) = C$ и $\log A + \log B = C$;

3) $\log \frac{A}{B} = C$ и $\log A - \log B = C$;

4) $\log A^n = C$ и $n \log A = C$ (n — четное).

Это следует из того, что для вторых уравнений A и B должны быть положительными, а для первых они могут быть одного знака (для уравнения $A = B$ они могут быть даже равны нулю).

Уравнения же $a^A = a^B$ и $A = B$, где $a > 0$, но $a \neq 1$, эквивалентны.

Пример 152. Решить уравнение

$$7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}.$$

Решение. $5^{x+3} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 7 \cdot 3^{x+1}$, $5^{x+2}(5-1) = 3^{x+1} \times (3^3 - 7)$, $5^{x+2} \cdot 4 = 3^{x+1} \cdot 20$, $5^{x+1} = 3^{x+1}$, $x + 1 = 0$, $x = -1$.

Пример 153. Решить уравнение

$$3^{4x+3} - 4 \cdot 3^{2x+3} + 27 = 0.$$

Решение. Положим $3^{2x+4} = y > 0$. Тогда будем иметь $y^2 - 12y + 27 = 0$. Отсюда $y_1 = 3$, $y_2 = 9$. Следовательно, $3^{2x+4} = 3$ и $3^{2x+4} = 9$. Первое уравнение эквивалентно уравнению $2x + 4 = 1$, а второе — уравнению $2x + 4 = 2$. Из них находим:

$$x_1 = -\frac{3}{2}, \quad x_2 = -1.$$

Пример 154. Решить уравнение

$$6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Решение. Разделим все члены уравнения на $4^{\frac{1}{x}} \neq 0$. Получим уравнение

$$6\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{x}} - 13\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + 6 = 0,$$

эквивалентное данному. Положив в нем $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} > 0$, придем к квадратному уравнению

$$6y^2 - 13y + 6 = 0.$$

Решив его, найдем: $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{2}{3}$. Отсюда получаем: $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{x} = 1$, $x_1 = 1$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$, $\frac{1}{x} = -1$, $x_2 = -1$.

Пример 155. Решить уравнение

$$(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62.$$

Решение. Положим $(4 + \sqrt{15})^x = y$. Так как $4 - \sqrt{15} =$

$= \frac{4^2-(\sqrt{15})^2}{4+\sqrt{15}} = \frac{1}{4+\sqrt{15}}$, то $(4-\sqrt{15})^x = \frac{1}{y}$, и данное уравнение запишется так:

$$y + \frac{1}{y} = 62 \text{ или } y^2 - 62y + 1 = 0.$$

Его корни $y_1 = 31 + 8\sqrt{15}$ и $y_2 = 31 - 8\sqrt{15}$ можно представить в следующем виде:

$$y_1 = 16 + 8\sqrt{15} + 15 = (4+\sqrt{15})^2, \quad y_2 = 16 - 8\sqrt{15} + 15 =$$
$$= (4-\sqrt{15})^2 = \frac{1}{(4+\sqrt{15})^2} = (4+\sqrt{15})^{-2}.$$

Отсюда

$$(4+\sqrt{15})^x = (4+\sqrt{15})^2, \quad x_1 = 2; \quad (4+\sqrt{15})^x = (4+\sqrt{15})^{-2},$$
$$x_2 = -2.$$

Пример 156. Решить уравнение

$$\log_2 \sqrt{(1-x)^2} = 3.$$

Решение. $\log_2 \sqrt{(1-x)^2} = \log_2 |1-x|$, $\log_2 |1-x| = 3$, $|1-x| = 2^3$, $|1-x| = 8$. Если $x > 1$, то $|1-x| = x-1$, $x-1 = 8$, $x_1 = 9$. Если $x < 1$, то $|1-x| = 1-x$, $1-x = 8$, $x_2 = -7$.

Пример 157. Решить уравнение

$$4\sqrt{\log_4 x} - \log_2 \sqrt{x} = 3.$$

Решение. Так как $\log_a N = \log_{a^n} N^n$ (см. п. 48, пример 67), то $\log_2 \sqrt{x} = \log_4 x$, и, положив $\sqrt{\log_4 x} = y > 0$, получим: $4y - y^2 = 3$, $y^2 - 4y + 3 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Отсюда

1) $\sqrt{\log_4 x} = 1$, $\log_4 x = 1$, $x_1 = 4$; 2) $\sqrt{\log_4 x} = 3$, $\log_4 x = 9$, $x_2 = 4^9 = 262\,144$.

Пример 158. Решить уравнение

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2.$$

Решение. Пользуясь формулой $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ (см. п. 48, пример 68), приведем уравнение к виду

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 (2x)} = \frac{1}{\log_2 (4x)}$$

или

$$\log_2 x (1 + \log_2 x) = 2 + \log_2 x.$$

Положив $\log_2 x = y$, получим: $y(1+y) = 2 + y$, $y^2 = 2$, $y = \pm\sqrt{2}$, $\log_2 x = \pm\sqrt{2}$, $x_1 = 2^{\sqrt{2}}$, $x_2 = 2^{-\sqrt{2}}$.

Пример 159. Решить уравнение

$$\log_a x \log_b c (1 + \log_c a) = \log_b x \log_c x \log_a c.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (см. п. 48, пример 69). Получим:

$$\log_a x \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b}\left(1 + \frac{1}{\log_a c}\right) = \frac{\log_a x}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a x}{\log_a c} \log_a c,$$

$$\log_a x (\log_a c + 1) = (\log_a x)^2,$$

$$\log_a x (\log_a c + 1 - \log_a x) = 0.$$

Отсюда

1) $\log_a x = 0$, $x_1 = 1$; 2) $\log_a c + 1 - \log_a x = 0$, $\log_a x = 1 + \log_a c$, $\log_a x = \log_a a + \log_a c$, $x_2 = ac$.

Пример 160. Решить уравнение

$$2(\lg 2 - 1) + \lg(5^{\sqrt{x}} + 1) = \lg(5^{1-\sqrt{x}} + 5).$$

Р е ш е н и е. Потенцируя и имея в виду, что здесь логарифмы десятичные, найдем

$$\frac{1}{5^2}(5^{\sqrt{x}} + 1) = 5^{1-\sqrt{x}} + 5.$$

Это уравнение эквивалентно данному, так как $5^{\sqrt{x}} + 1 > 0$, $5^{1-\sqrt{x}} + 5 > 0$. Положим $5^{\sqrt{x}} = y > 0$. Тогда получим:

$$\frac{1}{25}(y + 1) = 5y^{-1} + 5, \quad y^2 - 124y - 125 = 0;$$

$$y_1 = 125, \quad y_2 = -1.$$

Второй корень отбрасываем. Таким образом, $5^{\sqrt{x}} = 125$, $5^{\sqrt{x}} = 5^3$, $\sqrt{x} = 3$, $x = 9$.

Пример 161. Решить систему

$$\log_{\sqrt{10}}(x^2 + y^2) = 2\log_{10}(2a) + 2\log_{100}(x^2 - y^2); \quad xy = a^2.$$

Р е ш е н и е Пользуемся формулой $\log_a N = \log_{a^n} N^n$ и потенцируем. Получаем систему

$$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2); \quad xy = a^2.$$

Здесь нужно считать $x^2 > y^2$ и $xy > 0$. При этих условиях новая система эквивалентна данной. Кроме того, из первого уравнения данной системы видно, что $a > 0$. Так как $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$, то, положив $x^2 + y^2 = z$ и воспользовавшись уравнением $xy = a^2$, можно первое уравнение записать так: $z^2 - 4a^2z + 4a^4 = 0$ или $(z - 2a^2)^2 = 0$. Отсюда $z = 2a^2$, $x^2 - y^2 = 2a^2$. Итак, данная система эквивалентна следующей: $x^2 - y^2 = 2a^2$; $xy = a^2$. Решим ее:

$$y = \frac{a^2}{x}, \quad x^2 - \left(\frac{a^2}{x}\right)^2 - 2a^2 = 0, \quad x^4 - 2a^2x^2 - a^4 = 0,$$

$$x^2 = a^2 \pm \sqrt{2a^4} = a^2(1 \pm \sqrt{2})$$

Решение со знаком минус перед радикалом нужно отбросить. Поэтому получим:

$$x_{1,2} = \pm a\sqrt{\sqrt{2}+1},\quad y_{1,2} = \frac{a^2}{\pm a\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \pm a\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Пример 162. Решить систему

$$x^m = y^n;\ \log_p \frac{x}{y} = \frac{\log_p x}{\log_p y}.$$

Решение. Из второго уравнения видно, что $x > 0$, $y > 0$. Если же еще предположить, что $m \neq 0$ и $n \neq 0$, то первое уравнение эквивалентно такому: $m \log_p x = n \log_p y$. Так как $y \neq 1$ (см. второе уравнение), то последнее можно записать в виде $\frac{\log_p x}{\log_p y} = \frac{n}{m}$. Сравнивая полученное со вторым уравнением, видим, что $\log_p \frac{x}{y} = \frac{n}{m}$ или $m \log_p x - m \log_p y = n$. Таким образом, при $m \neq 0$ и $n \neq 0$ данная система эквивалентна такой. $m \log_p x - n \log y = 0$; $m \log_p x - m \log_p y = n$. Вычитая из второго уравнения первое, получим $(n - m) \log_p y = n$ и, если $n \neq m$, то

$$\log_p y = \frac{n}{n-m},\ \log_p x = \frac{n}{m} \log_p y = \frac{n^2}{m(n-m)},$$

и, следовательно, система имеет единственное решение:

$$x = p^{\frac{n^2}{m(n-m)}},\quad y = p^{\frac{n}{n-m}}.$$

Если $n = m \neq 0$, то ввиду положительности x и y из первого следует $x = y$, но это невозможно, потому что левая часть второго уравнения будет 0, а правая 1. В этом случае система не имеет решений. Если $m = 0$, а $n \neq 0$, тогда из первого уравнения получим $y = 1$. Но $y = 1$ не является допустимым значением для второго уравнения. Следовательно, при $m = 0$ и $n \neq 0$ система не имеет решений. При $n = 0$ и $m \neq 0$ система также не имеет решений, так как из первого уравнения получим $x = 1$, а тогда из второго найдем $y = 1$, что невозможно. Наконец, при $m = n = 0$ первое уравнение удовлетворяется тождественно, а из второго уравнения найдем:

$$(\log_p x - \log_p y) \log_p y = \log_p x;\ (\log_p y - 1) \log_p x = \log_p^2 y.$$

В этом случае система удовлетворяется любой парой таких чисел:

$$y \neq p,\ x = p^{\frac{\log_p^2 y}{\log_p y - 1}}.$$

62. К трансцендентным уравнениям относятся и такие, в которых имеются выражения, содержащие неизвестные одновременно и в показателе, и в основании. Математическое выражение, в котором и основание, и показатель не фиксированы и,

следовательно, оба могут принимать различные допустимые значения, называется сложным показательным или степенно-показательным выражением. Например, x^x есть степенно-показательное выражение. В общем случае степенно-показательное выражение можно записать в виде u^v, где u и v — любые математические выражения. Допустимые значения букв, входящих в u и v, обычно определяются из следующих условий: v может принимать любые, но вещественные значения, а u — положительные. При этих предположениях сложное показательное выражение u^v можно представить в виде $u^v = a^{v \log_a u}$.

Однако выражение u^v может иметь смысл и при некоторых $u \leqslant 0$. Это приходится иногда учитывать при решении уравнений. Так, например, уравнение $x^x = x$, кроме корня $x = 1$, имеет еще и корень $x = -1$.

Рассмотрим примеры уравнений, содержащих сложные показательные выражения, зависящие от неизвестных.

Пример 163. Решить уравнение

$$x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)} = a^{\log_{a^2} 4} \quad (a > 0).$$

Решение. Допустимые значения для x определяются из условий: $x > 0$, $x \neq 1$, $x^2 - x = x(x-1) > 0$. Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы было $x > 1$. При этих условиях данное уравнение эквивалентно уравнению $x^2 - x = 2$, потому что

$$x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)} = x^{\frac{1}{2}\log_x (x^2-x)^2} = x^{\log_x (x^2-x)} = x^2 - x,$$

$$a^{\log_{a^2} 4} = a^{\log_{a^2} 2^2} = 2.$$

Решив уравнение $x^2 - x - 2 = 0$, получим: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Так как есть еще дополнительное условие $x > 1$, то данное уравнение имеет единственное решение $x = 2$.

Пример 164. Решить уравнение

$$x^{\lg \sqrt[4]{x} - \frac{5}{8}\lg x} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Решение. Здесь $x > 0$. Логарифмируем по основанию 10. Получаем

$$\left(\lg \sqrt[4]{x} - \frac{5}{8}\lg x\right)\lg x = -\frac{1}{2}; \quad 8(\lg \sqrt{x})^2 \lg x - 5\lg^2 x + 4 = 0;$$

$$8 \cdot \frac{1}{8}\lg^4 x - 5\lg^2 x + 4 = 0; \quad \lg^4 x - 5\lg^2 x + 4 = 0;$$

$$\lg^2 x = \frac{5 \pm 3}{2}.$$

Отсюда

1) $\lg^2 x = 4$, $\lg x = \pm 2$; $x_1 = 10^2 = 100$, $x_2 = 10^{-2} = 0{,}01$;

2) $\lg^2 x = 1$, $\lg x = \pm 1$; $x_3 = 10$ $x_4 = 0{,}1$.

Пример 165. Решить систему

$$y^{x^2+x+2}=1;\ x+y=3.$$

Решение. Считая $y>0$, прологарифмируем первое уравнение по какому-нибудь основанию. Получим

$$(x^2+x+2)\log y=0.$$

Отсюда следует, что $\log y=0$ или $x^2+x+2=0$, и данная система распадается на такие:

$$1)\ \log y=0,\ x+y=3;\quad 2)\ x^2+x+2=0,\ x+y=3.$$

Из первой получаем: $y_1=1$, $x_1=2$. Из второй находим: $(x^3+x^2)+(-x^2-x)+(2x+2)=0$, $x^2(x+1)-x(x+1)+2(x+1)=0$, $(x+1)(x^2-x+2)=0$, $x+1=0$; $x_2=-1$, $y_2=4$.

Множитель x^2-x+2 имеет комплексные корни, которые не входят в область допустимых значений для x.

Посмотрим, нет ли еще таких решений, для которых $y<0$. Это может быть только при $y=-1$. Подставив $y=-1$ во второе уравнение, найдем $x=4$. Но x^2+x+2 при $x=4$ дает четное число 72, так что $y^{x^2+x+2}=(-1)^{72}=1$. Поэтому получим еще одно решение: $x_3=4$, $y_3=-1$.

Пример 166. Решить систему

$$x^z=y\sqrt[3]{y};\ y^z=\sqrt[3]{x};\ 2z=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}.$$

Решение. Допустимые значения неизвестных: $x>0$, $y>0$; z — любое вещественное число. Если же учесть, что $\sqrt[4]{x}$ и $\sqrt[4]{y}$ арифметические, то можно заключить на основании третьего уравнения, что и $z>0$.

Из первого уравнения системы находим $x=y^{\frac{4}{3z}}$. Подставив это значение x в правую часть второго уравнения, получим

$$y^z=y^{\frac{4}{9z}}.$$

Последнее равенство возможно в том и только в том случае, когда $y=1$ или $z=\frac{4}{9z}$. Если $y=1$, то из второго уравнения найдем $x=1$, а из третьего $z=1$. Итак, первое решение такое: $x_1=y_1=z_1=1$.

Если $z=\frac{4}{9z}$ или $z^2=\frac{4}{9}$, то $z=\frac{2}{3}$. Поэтому из равенства $x=y^{\frac{4}{3z}}$ находим, что $x=y^2$. Подставив $x=y^2$ в третье уравнение системы, получим:

$$\frac{4}{3}=\sqrt[4]{y^2}+\sqrt[4]{y},\ \sqrt{y}+\sqrt[4]{y}-\frac{4}{3}=0,\ \sqrt[4]{y}=\frac{-1+\sqrt{\frac{19}{3}}}{2}.$$

Отсюда $y=\frac{1}{16}\left(\sqrt{\frac{19}{3}}-1\right)^4$, $x=\frac{1}{256}\left(\sqrt{\frac{19}{3}}-1\right)^8$.

Возведя в степень, найдем второе решение в таком виде:

$$x_2=\frac{1}{162}(7409-979\sqrt{57}),\ y_2=\frac{1}{18}(89-11\sqrt{57}),\ z_2=\frac{2}{3}.$$

§ 4. Решение тригонометрических уравнений

63. В курсе элементарной математики рассматриваются некоторые виды уравнений, в которых неизвестные входят под знак тригонометрической функции, прямой или обратной. Такие уравнения называются тригонометрическими. В школьном курсе изучаются главным образом такие тригонометрические уравнения, в которых неизвестные находятся под знаком прямой тригонометрической функции. Именно на них здесь и остановимся.

Простейшими тригонометрическими уравнениями, содержащими неизвестные под знаком прямой тригонометрической функции, называются уравнения вида

$$\sin x=a,\ \cos x=a,\ \operatorname{tg} x=a,\ \operatorname{ctg} x=a.$$

Первые два уравнения имеют решения лишь при таких вещественных числах a, для которых $|a|\leqslant 1$, а последние — при любых вещественных a. Их решения даются соответственно формулами: $x=k\pi+(-1)^k\arcsin a$, $x=2k\pi\pm\arccos a$, $x=k\pi+\operatorname{arctg} a$, $x=k\pi+\operatorname{arcctg} a$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ или $x=k\pi+(-1)^k a$, $x=2k\pi\pm a$, $x=k\pi+a$, $x=k\pi+a$, где a — какое-нибудь решение соответствующего уравнения. Последняя запись особенно удобна в том случае, когда простейшие уравнения записаны в виде $\sin x=\sin a$, $\cos x=\cos a$, $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} a$.

Если тригонометрические уравнения имеют вид $\sin^2 x=a$, $\cos^2 x=a$, $\operatorname{tg}^2 x=a$, $\operatorname{ctg}^2 x=a$, то решения их можно представить с помощью одной и той же формулы $x=k\pi\pm a$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ и a — какое-нибудь решение соответствующего уравнения.

Кроме простейших тригонометрических уравнений, в элементарной математике рассматриваются главным образом уравнения, которые как-либо могут быть сведены к простейшим или имеют тип простейших, т. е представимы в виде $\sin A=a$, $\cos A=a$, $\operatorname{tg} A=a$, $\operatorname{ctg} A=a$, где A — выражение, содержащее неизвестные, причем решение уравнений

$$A=k\pi+(-1)^k\arcsin a,\quad A=2k\pi\pm\arccos a,\quad A=k\pi+\operatorname{arctg} a,$$
$$A=k\pi+\operatorname{arcctg} a$$

не вызывает затруднений.

Пример 167. Решить уравнение

$$\sin 2x+\sin 3x=3\sin x.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулами $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ для преобразования левой части уравнения. Получим

$2\sin x \cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 3\sin x$ или $\sin x(\cos x - 2\sin^2 x) = 0$.

Отсюда

1) $\sin x = 0$, $x_1 = k\pi$; 2) $\cos x - 2(1 - \cos^2 x) = 0$, $2\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$,

$$\cos x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}; \quad x = 2k\pi \pm \arccos \frac{\sqrt{17} - 1}{4}.$$

Значение $\frac{-1 - \sqrt{17}}{5}$ по абсолютной величине больше единицы и поэтому отброшено.

Пример 168. Решить уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Р е ш е н и е. Перенесем первое слагаемое левой части равенства в правую, а второе слагаемое преобразуем, воспользовавшись формулой синуса суммы двух углов. Получим

$$\sin x - \cos x = 1 - \sin 2x.$$

Но $1 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = (\sin x - \cos x)^2$. Поэтому уравнение можно записать так

$$\sin x - \cos x = (\sin x - \cos x)^2$$

или

$$(\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x - 1) = 0.$$

Отсюда

1) $\sin x - \cos x = 0$, $\sin x = \cos x$, $\operatorname{tg} x = 1$, $x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}$;

2) $\sin x - \cos x - 1 = 0$, $\sin x - \cos x = 1$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$x - \frac{\pi}{4} = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4}$, $x_2 = (2n + 1)\pi$, $x_3 = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$.

Пример 169. Решить уравнение

$$2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \sec x.$$

Р е ш е н и е. Выразив $\cos 2x$ и $\sec x$ через $\cos x$ и перенеся все члены уравнения в левую сторону, получим

$$2(2\cos^2 x - 1) - 8\cos x + 7 - \frac{1}{\cos x} = 0.$$

Положим $\cos x = y$. Тогда придем к кубическому уравнению

$$4y^3 - 8y^2 + 5y - 1 = 0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$(4y^3 - 4y^2) + (-4y^2 + 4y) + (y - 1) = (y - 1)(4y^2 - 4y + 1) = (y - 1)(2y - 1)^2.$$

Следовательно,

$$(y-1)(2y-1)^2=0;\ y_1=1,\ y_2=\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$1)\ \cos x=1,\ x_1=2k\pi;\ 2)\ \cos x=\frac{1}{2},\ x_2=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

Пример 170. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\sin x\left(\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right).$$

Решение.

$$\sin x\left(\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)=\sin x\cdot\frac{\sin x\sin\frac{x}{2}+\cos x\cos\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\sin x\cdot\frac{\cos\left(x-\frac{x}{2}\right)}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\sin x\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg}x.$$

Данное уравнение в области допустимых значений эквивалентно такому: $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}x$ или $\operatorname{ctg}x=0$ Из последнего получаем $x=\frac{2k+1}{2}\pi$. Однако найденные значения x не являются допустимыми, так как при них обе части уравнения теряют смысл. Следовательно, уравнение не имеет решений.

Пример 171. Решить уравнение

$$\sin 2x+\operatorname{tg}x=2.$$

Решение. Так как $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}$, то данное уравнение запишется так: $\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}+\operatorname{tg}x=2$ или $\operatorname{tg}^3x-2\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}x-2=0$. Положим $\operatorname{tg}x=y$. Получим: $y^3-2y^2+3y-2=0$, $(y^2-1)+(-2y^2+2y)+(y-1)=0$, $(y-1)(y^2-y+2)=0$; $y-1=0$, $y=1$, $\operatorname{tg}x=1$, $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ (уравнение $y^2-y+2=0$ не имеет вещественных корней).

Пример 172. Решить уравнение

$$(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x.$$

Решение.

$$2\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x};$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{2}{\sin 2x},\ \sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1. \qquad (*)$$

Так как синус по абсолютной величине не больше единицы, то из равенства (*) следует, что

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right|=1. \qquad (**)$$

Таким образом, уравнение (**) есть следствие данного уравнения и все решения данного уравнения находятся среди решений уравнения (**). Но если $\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right|=1$, то $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\pm 1$, $\frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ и $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. Подставляя это значение x в равенство (*), найдем: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\times$ $\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=1$, $\cos k\pi=1$, $k=2n$, так что все решения данного уравнения содержатся в формуле $x=\frac{\pi}{4}+2n\pi$.

Пример 173. Решить уравнение

$$8\sin x\cos 3x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$8\sin x\cos 3x\cdot\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos\frac{2}{3}\pi\right)=$$

$$=4\cos 3x\left(\sin x\cos 2x+\frac{1}{2}\sin x\right)=$$

$$=4\cos 3x\left[\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)+\frac{1}{2}\sin x\right]=$$

$$=2\cos 3x\sin 3x=\sin 6x$$

Следовательно, данное уравнение эквивалентно такому: $\sin 6x=1$. Отсюда $6x=\frac{4k+1}{2}\pi$, $x=\frac{4k+1}{12}\pi$.

Пример 174. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0.$$

Решение. Так как $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-$ $-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$, то, положив $\sin 2x=y$, получим уравнение $1-\frac{1}{2}y^2+y+a=0$ или $y^2-2y-2(a+1)=0$. Отсюда $y=1\pm\sqrt{2a+3}$. Чтобы корни были вещественны, должно быть $2a+3\geqslant 0$ или $a\geqslant-\frac{3}{2}$. Но, кроме того, $|y|=$ $=|\sin 2x|\leqslant 1$. Поэтому должно выполняться неравенство $|1\pm$ $\pm\sqrt{2a+3}|\leqslant 1$. Но неравенство $|1+\sqrt{2a+3}|<1$ невозмож-

но, так как $1+\sqrt{2a+3} \geqslant 1$, а неравенство $|1-\sqrt{2a+3}| \leqslant 1$ равносильно двойному неравенству $-1 \leqslant 1-\sqrt{2a+3} \leqslant 1$ (*), конечно, при условии $a \geqslant -\frac{3}{2}$. С другой стороны, $1-\sqrt{2a+3} \leqslant 1$ справедливо при любом $a \geqslant -\frac{3}{2}$, и поэтому неравенство (*) равносильно такому: $-1 \leqslant 1-\sqrt{2a+3}$. Отсюда $\sqrt{2a+3} \leqslant 2$, $2a+3 \leqslant 4$, $a \leqslant \frac{1}{2}$. Итак, должно быть $-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$, иначе уравнение не имеет решений. При выполнении же полученных неравенств решения уравнения будут содержаться в формуле

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{(-1)^k}{2} \arcsin(1-\sqrt{2a+3}).$$

Пример 175. Решить уравнение

$$\sin^2 x^2 + \sin^2 2x^2 = \sin^2 3x^2 + \sin^2 4x^2.$$

Решение.

$$\frac{1-\cos 2x^2}{2} + \frac{1-\cos 4x^2}{2} = \frac{1-\cos 6x^2}{2} + \frac{1-\cos 8x^2}{2};$$

$$\cos 2x^2 + \cos 4x^2 = \cos 6x^2 + \cos 8x^2,\ 2\cos 3x^2 \cos x^2 =$$
$$= 2\cos 7x^2 \cos x^2,\ \cos x^2 (\cos 3x^2 - \cos 7x^2) = 0;$$
$$2\cos x^2 \sin 2x^2 \sin 5x^2 = 0.$$

Отсюда 1) $\cos x^2 = 0$, $x_1^2 = \frac{2k+1}{2}\pi$; 2) $\sin 2x^2 = 0$, $2x^2 = k\pi$, $x_2^2 = \frac{k\pi}{2}$; 3) $\sin 5x^2 = 0$, $5x^2 = k\pi$, $x_3^2 = \frac{k\pi}{5}$, причем $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Но при $k = 2n+1$ $x_2^2 = \frac{2n+1}{2}\pi = x_1^2$. Кроме того, x_2^2 при $k = 2n$ дает те же значения, что и x_3 при $k = 5n$. Поэтому все решения уравнения содержатся в двух формулах:

$$x = \pm\sqrt{\frac{2k+1}{2}\pi} \text{ и } x = \pm\sqrt{\frac{k\pi}{5}}.$$

Замечание. При $k<0$ полученные формулы дают мнимые числа для x. Однако под знаком синуса находится не x, а x^2, который при $k < 0$ есть вещественное число, так что эти мнимые значения x также являются корнями рассматриваемого уравнения.

Пример 176. Решить систему

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4};\ x + y = 75°.$$

Решение. Пользуясь формулой $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, приведем первое уравнение к виду $\frac{\cos 2x + \cos 2y}{2} = \frac{1}{4}$ или $\cos(x+$

$+ y)\cos(x - y) = \frac{1}{4}$. Отсюда $\cos(x - y) = \frac{1}{4\cos(x + y)} =$

$$= \frac{1}{4\cos 75^\circ} = \frac{1}{4\sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ}{4\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ}{2\sin 30^\circ} = \cos 15^\circ.$$

Итак, $\cos(x - y) = \cos 15^\circ$, и данная система приводится к следующей эквивалентной $x - y = 360^\circ n \pm 15^\circ$, $x + y = 75^\circ$. Отсюда $x_1 = 180^\circ n + 45^\circ = (4n + 1)45^\circ$, $y_1 = 30^\circ - 180^\circ n = (1 - 6n)30^\circ$; $x_2 = 180^\circ n + 30^\circ = (6n + 1)30^\circ$, $y_2 = 45^\circ - 180^\circ n = (1 - 4n)45^\circ$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Легко убедиться, что $x_1 = y_2$ и $x_2 = y_1$.

64. Так как в школьном курсе математики даются лишь определения символов $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ и какие-либо операции над ними не рассматриваются, то здесь будут приведены уравнения, содержащие неизвестные под знаком обратных тригонометрических функций, лишь самого простого вида, для решения которых не требуется ничего, кроме определения указанных символов.

Обычно для решения уравнений такого вида приходится брать синусы (или косинусы, таигенсы и т. д.) от обеих частей уравнения. При этом следует иметь в виду, что получающееся при этом новое уравнение, вообще говоря, неравносильно данному. Например, $A = B$ и $\sin A = \sin B$ неэквивалентны. То же следует сказать об уравнениях $A = B$ и $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B$ и им аналогичных.

Простейшими тригонометрическими уравнениями, содержащими неизвестные под знаком обратной тригонометрической функции, иазываются уравнения вида

$$\arcsin x = a;\ \arccos x = a;\ \operatorname{arctg} x = a;\ \operatorname{arcctg} x = a.$$

Каждое из этих уравнений имеет единственное решение, равное соответственно $x = \sin a$, $x = \cos a$, $x = \operatorname{tg} a$, $x = \operatorname{ctg} a$, если только число a удовлетворяет следующим условиям: $-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$ для первого; $0 \leqslant a \leqslant \pi$ для второго; $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ для третьего, $0 < a < \pi$ для четвертого. При невыполнении для a этих условий соответствующие простейшне уравнения ие имеют решеиий.

В этом же пункте будут приведены примеры некоторых трансцендентных уравнений, которые не являются тригонометрическими.

Пример 177. Решить уравнение

$$\arcsin 3x = 1.$$

Решение. $3x = \sin 1$, $x = \frac{1}{3}\sin 1$.

Пример 178. Решить уравнение

$$\arcsin 2x + \operatorname{arctg} 3x = \pi.$$

Решение. Так как

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin 2x \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 3x < \frac{\pi}{2},$$

то

$$-\pi < \arcsin 2x + \operatorname{arctg} 2x < \pi.$$

Следовательно, уравнение не имеет решений.

Пример 179. Решить уравнение

$$\arcsin x = \arccos x.$$

Решение. Возьмем косинус от правой и от левой частей уравнения. Получим: $\cos(\arccos x) = x$, $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$. Перед корнем взят знак плюс, потому что $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, а косинус такого угла неотрицателен. Следовательно, данное уравнение приводится к такому: $x = \sqrt{1-x^2}$. Решив его, найдем $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Но так как $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ постороний для иррационального уравнения то он посторонний и для данного. Оставшееся значение $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ будет корнем даиного уравнеиия, однако это должно быть проверено. Проверяем:

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Замечание. Это уравнение можно решить быстрее, если воспользоваться равенством $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (см. упр. 129).

Пример. 180. Решить уравнение

$$\log_{\cos x}\sin x + \log_{\sin x}\cos x = 2.$$

Решение. Воспользовавшись формулой $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, приведем данное уравнение к такому: $\log_{\cos x}\sin x + \frac{1}{\log_{\cos x}\sin x} = 2$ или $\log^2_{\cos x}\sin x - 2\log_{\cos x}\sin x + 1 = 0$. Отсюда $(\log_{\cos x}\sin x - 1)^2 = 0$, $\log_{\cos x}\sin x = 1$, $\sin x = \cos x$, $\operatorname{tg} x = 1$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Следует иметь в виду, что здесь нельзя было бы написать $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, так как при $k = 2n + 1$ $\sin x < 0$ и $\cos x < 0$, а этого не должно быть, потому что $\cos x$ и $\sin x$ являются основаниями логарифмов и не могут быть отрицательными.

Пример 181. Решить уравнение

$$\sin^2 2^{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}.$$

Решение.

$$2^{\sqrt{-x}} = k\pi \pm \frac{\pi}{4};\ \sqrt{-x} = \log_2\left(k\pi \pm \frac{\pi}{4}\right);$$

$$x = -\log_2^2\left(k\pi \pm \frac{\pi}{4}\right).$$

Здесь k не может быть не только отрицательным числом, но даже нулем. Действительно, при $k = 0$ получим $2^{\sqrt{-x}} = \pm\frac{\pi}{4}$, что невозможно, так как $2^{\sqrt{-x}} > 1$, а $\pm\frac{\pi}{4} < 1$. Итак, $x = -\log_2^2\left(k\pi \pm \frac{\pi}{4}\right)$, где $k = +1, +2, +3, \ldots$

Пример 182. Решить уравнение

$$25^{\log_{0,2}(\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5)} = \frac{1}{9}.$$

Решение. Запишем показатель так:

$$\log_{0,2^{-2}}(\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5)^{-2} =$$
$$= \log_{25}(\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5)^{-2}.$$

Тогда, пользуясь тождеством $a^{\log_a z} = z$, приведем уравнение к виду $(\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5)^{-2} = \frac{1}{9}$ или $(\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5)^2 = 9$. Отсюда $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5 = 3$ и $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 5 = -3$. Решаем первое уравнение: $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2 = 0$, $\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + \frac{2}{\cos^2 x} = 0$ (разделили на $\cos x \neq 0$), $\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 2(\operatorname{tg}^2 x + 1) = 0$, $3\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 2 = 0$, $\operatorname{tg} x = \frac{-5 \pm 1}{6}$; $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}$; $x_1 = k\pi - \frac{\pi}{4}$; $x_2 = k\pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. Поступая аналогично со вторым уравнением, получим уравнение $9\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 8 = 0$, которое не имеет решений.

Упражнения

Выяснить, являются ли равносильными уравнения (134 — 136):

134. $x^3 - 3 = 2x$ и $x^3 - 3 + \frac{1}{x+1} = 2x + \frac{1}{x+1}$

135. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 2$ и $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = 2$.

136. $\log\sin x = 0$ и $\sin x = 1$.

Выяснить, являются ли равносильными системы (137 — 139):

137. $x^2 + y^2 = 5$; $xy = 2$ и $x^2 + y^2 = 5$; $\log x + \log y = \log 2$.

138. $x^2 + y^2 = 5$; $xy = 2$ и $x^2 + y^2 = 5$; $\log|x| + \log|y| = \log 2$.

139. $A = 0$; $B = 0$; $m_1A + n_1B = 0$ и $m_2A + n_2B = 0$, если $m_1n_2 - m_2n_1 \neq 0$.

140. Является ли совокупность уравнений

$$x + y + 5 = 0;\ x + y + 5 = 0$$

системой?

141. В результате решения системы уравнений

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{2}{3};\ \frac{xy}{x-y}=2$$

нашли, что системе удовлетворяют следующие числа: $x=2$, $y=1$. Сколько это даст решений одно или два?

Решить уравнения (142 — 151):

142. $\frac{2x+3}{3}-\frac{5x-14}{12}=\frac{x+1}{4}-3.$

143. $\frac{7-2x}{2}-\left(\frac{7x-2}{7}-2x\right)=3\frac{11}{14}$

144. $\frac{x}{a^2-b^2}+\frac{2x}{a+b}+\frac{a+b-1}{2(a-b)}=\frac{x}{a-b}+1.$

145. $\frac{x-m-n}{p}+\frac{x-n-p}{m}+\frac{x-p-m}{n}=3.$

146. $|2x-5|=9.$

147. $|x-2|+|2x-7|=3$

148. $\frac{3}{2x-16}+\frac{3x-20}{x-8}+\frac{1}{8}=\frac{13x-102}{3x-24}.$

149. $\frac{a}{c}-\frac{ax}{cx-1}=\frac{c}{a}-\frac{cx}{ax-1}$

150 $\frac{a+x}{a^2+ax+x^2}+\frac{a-x}{a^2-ax+x^2}=\frac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}.$

151. $\frac{(x^2+a^2-b^2)(a+x)}{ax}+\frac{(a^2+b^2-x^2)(b+a)}{ab}+$

$$+\frac{(b^2+x^2-a^2)(x+b)}{bx}=0.$$

152. Определить a и b так, чтобы система

$$x+2y=6;\ 4x-ay=b$$

была несовместна

153. Определить a и b так, чтобы система

$$5x+3y=b;\ 10x+ay=42$$

была неопределенна.

154. Выяснить, совместна ли система

$$2x+y-z=1;\ x+3y+5z=1;$$
$$3x-2y+4z=14;\ 2x-2y-z=7.$$

Решить системы уравнений (155 — 161):

155. $x-|y-4|=4;\ |x-3|+|y-4|=3$

156. $|x+y|=1;\ |x|+y=1$

157. $\frac{x}{a-p}+\frac{y}{b-p}=1;\ \frac{x}{a-q}+\frac{y}{b-q}=1;\ a\neq b,\ p\neq q.$

158 $x-y+z=0;\ (a+b)x-(a+c)y+(b+c)z=0;\ abx-$

$$-acy+bcz=1.$$

159. $ax+by+cz=bx+cy+az=cx+ay+bz=a+b+c.$

160 $\frac{x_1-a_1}{m_1}=\frac{x_2-a_2}{m_2}=\ldots=\frac{x_n-a_n}{m_n};\ x_1+x_2+\ldots+x_n=a;$

$$m_1+m_2+\ldots+m_n\neq 0.$$

161. $ax+y+z=1;\ x+ay+z=a;\ x+y+az=a^2.$

162. Найти вещественные x и y, если

$$\frac{x+1+(y-2)i}{1-i}=1+2i.$$

163. Квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2. Составить квадратное уравнение, у которого корни $y_1=x_1+\frac{1}{x_1}$, $y_2=x_2+\frac{1}{x_2}$.

164. Проверить, что если уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет равные корни, то и уравнение $mx^2 + p(m+n)x + q(m+2n) = 0$ имеет такой же корень.

165. При некоторых m уравнение $(m+3)x^2 + (m+1)x + 1 - m = 0$ имеет равные корни. Составить квадратное уравнение, имеющее корнями эти значения m.

166. Определить a и b так, чтобы уравнения $(2a+1)x^2 - (3a-1)x + 2 = 0$ и $(b+2)x^2 - (2b+1)x - 1 = 0$ имели два общих корня.

Решить уравнения (167 — 171)

167. $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$, $ab \neq 0$

168. $\dfrac{b}{x-a} + \dfrac{a}{x-b} = 2$.

169. $\dfrac{(x-a)^3 - (x-b)^3}{(x-a)^2 + (x-b)^2} + a - b = 0$.

170. $(x+1)^4 + (x-3)^4 = 32$

171. $x^5 - 1 = 0$.

172. Составить биквадратное уравнение с вещественными коэффициентами, один из корней которого равен $2 - 3i$

173. При каких a, b и n все корни уравнения $\dfrac{x^2}{x^2-a^2} + \dfrac{x^2}{x^2-b^2} = n+1$ вещественны?

174. Один из корней уравнения $x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + 8 = 0$ равен $2i$. Найти остальные корни.

175. Решить уравнение

$$x^5 - x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x + 2 = 0.$$

176. Три корня уравнения $x^5 - 11x^4 - 7x^3 + 323x^2 - 186x - 2520 = 0$ суть три последовательных натуральных числа, сумма квадратов которых 110. Найти все корни уравнения.

177. Найти все корни уравнения $24x^3 - 14x^2 - 63x + 45 = 0$, зная что один из его корней в два раза больше другого.

Решить системы уравнений (178 — 185):

178. $(x+y+1)(x+2y-3) = 0$, $(2x+y-1)(3x+5y-2) = 0$.

179. $x + xy + y = 11$, $x^2y + xy^2 = 30$.

180. $x^2 + y^2 = 1$; $x^3y + 2xy^2 + y^3 = 2$.

181. $x + y = \dfrac{21}{8}$, $\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{35}{6}$.

182. $\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12$; $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}$

183. $x + y + z = 13$; $x^2 + y^2 + z^2 = 61$; $2yz = x(y+z)$

184. $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $yx + xz - yz = 7$; $x + y + z = 6$.

185. $x(y+z) = n^2 + p^2$; $y(z+x) = p^2 + m^2$; $z(x+y) = m^2 + n^2$, где $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$.

Решить уравнения (186 — 194)

186. $x^2 - 3x + 5\sqrt{x^2 - 3x + 76} = 260$.

187. $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{4x+5}$.

188. $(x+5)(x-2) + 3\sqrt{x(x+3)} = 0$.

189. $\sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2-9} = 4 + \sqrt{34}$.

190. $\dfrac{\sqrt{x^3-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+3} = \dfrac{7}{\sqrt{x-3}}$.

191. $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$

192. $\sqrt[3]{x^3+2x+1}+\sqrt[3]{x+1}=0$

193. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=1$

194. $\sqrt[n]{x^n+\sqrt{a^n x^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt{x^n a^{n^2}}}=b,\ b>a>0.$

Решить системы уравнений (195 — 196)

195. $x+y-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y},\ xy=15.$

196. $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}}=\dfrac{7}{2},\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3.$

197. Из шахматного турнира двое участников выбыли, причем один сыграл 10 партий, а второй — только одну. Поэтому в турнире было сыграно всего 55 партий. Узнать, играли ли выбывшие участники между собой

198. Два слесаря разных разрядов изготовили вместе a одинаковых деталей, заработав при этом одинаковые суммы Если бы первый из них изготовил столько деталей, сколько изготовил второй, и, наоборот, второй изготовил бы их столько, сколько первый, то первый заработал бы p руб., а второй q руб. Сколько деталей изготовил каждый рабочий?

199. Собрание началось между 6 и 7 *час* вечера, а окончилось между 9 и 10 *час*. За время, протекшее от начала до конца собрания, часовая и минутная стрелки поменялись местами Определить точное время начала и конца собрания.

200. Пристань A находится от пристани B на расстоянии a *км* вниз по течению. Моторная лодка совершает рейс от A до B и обратно, не задерживаясь в B, за t *час*. В один из рейсов, возвращаясь из B в A, лодка потерпела аварию на расстоянии b *км* от A, что вызвало задержку лодки на t_0 *час*. В результате аварии скорость лодки уменьшилась вдвое, и путь от B до A был пройден за такое же время, как и путь от A до B. Найти скорость лодки в стоячей воде и скорость течения воды.

201. Проценты на деньги, положенные в сберкассу, составили за год 15 руб. Не взяв их, а добавив еще 85 руб., вкладчик оставил все деньги еще на год. По истечении второго года вклад вместе с процентными начислениями составил 420 руб. Какая сумма была положена первоначально?

202. Расстояние между конечными пунктами M и N по железной дороге равно 200 *км* Поезд идет от M первые 60 *км* в гору, следующие 100 *км* по ровному месту и остальные 40 *км* опять в гору. При этом поезд в гору идет на 10 *км* в час медленнее, чем по ровному месту. На пути есть станции A, B, C и D на расстоянии 40, 85, 135 и 180 *км* от M, и на каждой из них поезд стоит по 3 *мин*. Найти время прихода поезда на станции A, B, C и D, если известно, что он вышел из M в 8 *час* утра и пришел в N в 12 *час* 42 *мин* дня

203. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через a *час* За сколько часов проходит каждый из них расстояние между A и B, если первый, вышедший из A, пришел в B на b *час* позже, чем второй пришел в A?

204. В двух сплавах содержится разное количество меди: в первом на 40% меньше, чем во втором. После того как их сплавили вместе, получился сплав, содержащий 36% меди Найти процентное содержание меди в каждом сплаве, если в первом ее было 6 *кг*, а во втором 12.

205. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 20 *км*, отплыл плот, уносимый течением реки Через 2 *час* 24 *мин* из пункта A в том же направлении отправилась моторная лодка. Двигаясь со скоростью 20 *км/час*, она через некоторое время нагнала плот, а затем сразу повернула обратно

и, продолжая двигаться с той же скоростью, в пункт A прибыла одновременно с прибытием плота в пункт B. Какова скорость течения реки?

206. Два велосипедиста, выехав одновременно с разными, но постоянными скоростями из пункта A в пункт B, достигнув его, сразу поворачивают обратно. Первый велосипедист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии a км от B, затем, достигнув A и снова повернув к B, он встречает второго велосипедиста, пройдя k-ю часть расстояния от A до B. Найти расстояние от A до B.

Решить уравнения (207 — 218):

207. $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \ldots 5^{2x} = 0{,}04^{-28}$.

208. $3 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 2 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}$.

209. $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$

210. $\sqrt{2\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}$.

211. $\log_{16}x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

212. $\log_x\sqrt{5} + \log_x(5x) - 2{,}25 = (\log_x\sqrt{5})^2$

213. $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$

214. $\log_{\frac{x^2}{a}} a + \log_{a^2} x = 1$

215. $\log_5 120 + (x-3) - 2\log_5(1 - 5^{x-3}) = -\log_5(0{,}2 - 5^{x-4})$.

216 $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \frac{1}{4}\lg 16 - \sqrt{x+0{,}25}\lg 4$

217. $x^{\log_2 x + 4} = 32$.

218. $x^{\log_x (x-2)^2} = 9$.

Решить системы (219 — 224):

219. $x^{y+1} = 27$; $x^{2y-5} = \frac{1}{3}$.

220. $\log_{xy}(x-y) = 1$; $\log_{xy}(x+y) = 0$.

221. $\frac{1}{2}\lg x + \frac{1}{2}\lg y - \lg(4 - \sqrt{x}) = 0$; $(25^{\sqrt{x}})^{\sqrt{y}} - 125 \cdot 5^{\sqrt{y}} = 0$.

222. $5^{2x} \cdot 3^y = 675$; $\log_{\sqrt{2}}(x+y) = 6$.

223. $x^y = y^x$; $a^x = b^y$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$).

224. $x^{\frac{z}{3}} = \sqrt[15]{y^8}$; $y^{\frac{z}{3}} = \sqrt[15]{x^2}$; $\frac{5}{9}z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Решить уравнения (225 — 239)

225. $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$.

226. $\sin 3x \sin 5x + \cos x \cos 7x = 0$

227. $4\cos\frac{8x}{7}\cos\frac{4x}{7}\cos\frac{2x}{7}\cos\frac{x}{7} = \frac{1}{4}$

228. $\sin 2x \cos x - \cos x = -\sin x(1 + \cos 2x)$.

229. $\frac{(\cos x + \sin x)^2 - \sin 2x}{\cos^4 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x} = 2$.

230. $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 4\sin x$.

231. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1+\sin 2x$.

232. $\cos^2 x+\sin^2(x+\alpha)-2\cos x\cos\alpha\cos(x+\alpha)=\sin^2\alpha$

233. $\sin^{10}x+\cos^{10}x=\frac{29}{16}\cos^4 2x$.

234. $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$

235. $2\sin 2x=3(\sin x+\cos x)$

236. $\operatorname{tg}(x^2-x)\operatorname{ctg}6=1$, x — вещественное число.

237. $x^2+2x\sin(xy)+1=0$

238. $6\arcsin\sqrt{x}=\pi$.

239. $2\arcsin x+\arccos x=4$.

240. Решить систему

$$\sin(x+y)=0;\ \sin(x-y)=0,$$

если $0<x<\pi$, $0<y<\pi$.

Глава V

Решение и доказательство неравенств

§ 1. Алгебраические неравенства

65. Два математических выражения, соединенных знаком $>$ или $<$, образуют **неравенство**.

Допустимыми значениями букв, входящих в неравенство, будут все те значения букв, которые являются допустимыми для обоих выражений, образующих неравенство.

Неравенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв, а также справедливое числовое неравенство называется **тождественным**.

Доказательство утверждения, что некоторое неравенство тождественное, называют **доказательством неравенства**.

Неравенство может быть не тождественным, а выполняться лишь при некоторых значениях входящих в него букв. Система значений этих букв (неизвестных), удовлетворяющих неравенству, т. е. *обращающих его в тождественное*, называется **решением** этого неравенства. **Решить неравенство** — значит найти множество всех его решений.

Если нет таких значений букв, входящих в неравенство, при которых оно справедливо, то про него говорят, что оно **противоречиво**, или **не имеет решения**.

Подобно уравнениям и по тем же признакам неравенства разделяются на неравенства **с одним и несколькими неизвестными**, на неравенства **трансцендентные и алгебраические** (целые, дробные и иррациональные), а целые алгебраические — на неравенства **первой, второй и т. д. степени**.

Системою неравенств называются два или несколько (больше двух) неравенств, в которых неизвестные, обозначенные одинаковыми буквами, имеют одну и ту же величину. **Решением системы неравенств** называется всякая совокупность значений неизвестных, удовлетворяющих каждому неравенству этой системы. **Решить систему неравенств** — значит найти все ее решения.

При решении и доказательстве неравенств и систем приходится пользоваться основными свойствами неравенств. Напомним их:

1) если $a > b$, то $b < a$;
2) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;
3) если $a > b$, то $a - b > 0$;
4) если $a - b > 0$, то $a > b$;
5) если $a > b$, то $a + c > b + c$;
6) если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;
7) если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$;
8) если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$;
9) если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$;
10) если $a > b > 0$ или $b < a < 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;
11) если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$;
12) если $a > b > 0$ и n — натуральное число, то $a^n > b^n$,
13) если $a > b$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ($\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ арифметические).

Понятие следствия и понятие эквивалентности для неравенств формулируются аналогично соответствующим понятиям для уравнений (см. п. 52).

Укажем некоторые теоремы об эквивалентности неравенств:

1) если одно неравенство есть следствие другого и, обратно, второе неравенство есть следствие первого, то эти неравенства эквивалентны;

2) если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же математическое выражение, имеющее смысл при всех допустимых значениях неизвестных, входящих в неравенство, то получим неравенство, эквивалентное данному;

3) если обе части неравенства умножить на одно и то же математическое выражение, которое имеет смысл и положительно при всех допустимых значениях неизвестных, входящих в неравенство, то получим неравенство, эквивалентное данному;

4) если обе части неравенства умножить на математическое выражение, которое имеет смысл и отрицательно при всех допустимых значениях неизвестных, входящих в неравенство, и заменить знак неравенства на знак противоположного смысла, то получим неравенство, эквивалентное данному;

5) неравенства $\frac{A}{B} > 0$ и $AB > 0$ эквивалентны.

66. Неравенством первой степени или линейным неравенством называется такое целое алгебраическое неравенство, которое после переноса всех членов в одну сторону, раскрытия скобок и приведения подобных членов принимает вид $ax + by + \ldots + cz + d > 0$ или $ax + by + \ldots + cz + d < 0$.

Ограничимся рассмотрением неравенств и систем неравенств первой степени лишь с одним неизвестным и с двумя неизвестными, которое проведем на примерах. Линейное неравенство

с одним неизвестным имеет вид $ax+b>0$ или $ax+b<0$, а с двумя неизвестными $ax+by+c>0$ или $ax+by+c<0$.

Решения неравенств с одним неизвестным обычно образуют интервал. Интервалом (a, b) называется множество всех вещественных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a<x<b$. Сегментом $[a, b]$ называется множество всех вещественных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x\leqslant b$. Геометрически сегменту $[a, b]$ соответствует отрезок числовой оси, ограниченный точкой с абсциссой $x=a$ и точкой с абсциссой $x=b$, включая эти точки, а интервалу (a, b) — тот же отрезок, исключая указанные точки. Сегмент называют также замкнутым промежутком, а интервал — открытым промежутком. Есть и полузамкнутые промежутки $[a, b)$ и $(a, b]$, соответствующие множествам всех чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x<b$ в первом случае и $a<x\leqslant b$ — во втором. Также называют промежутками множества всех чисел x, удовлетворяющих неравенствам $x<b$ и $x>a$, которые обозначают соответственно $(-\infty, b)$ и $(a, +\infty)$. Множество всех вещественных чисел называют промежутком $(-\infty, +\infty)$. Символы $-\infty$ и $+\infty$ читаются «минус бесконечность» и «плюс бесконечность».

Пример 183. Решить неравенство

$$\frac{ax}{a-2}-\frac{x-1}{3}<\frac{2x+3}{4}.$$

Решение. 1. Если $a>2$, то, умножив неравенство на $12(a-2)>0$, получим равносильное неравенство $12ax-4(a-2)(x-1)<3(a-2)(2x+3)$. После упрощений найдем $2(a+10)x<5(a-2)$. Так как $a+10>0$, то отсюда получим $x<\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$.

2. Если $a-2<0$, то, поступая так же, придем к неравенству $2(a+10)x>5(a-2)$. Пусть $a+10>0$, т. е. $-10<a<2$, тогда $x>\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$. Пусть $a+10<0$, т. е. $a<-10$, тогда $x<\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$. Если же $a+10=0$, то неравенство удовлетворяется тождественно.

Пример 184. Решить систему

$$2x+5>41;\ 4x-1<3x+37.$$

Решение. Из первого неравенства находим: $2x>36$, $x>18$. Из второго получаем $x<38$. Следовательно, $18<x<38$, т. е. решения образуют интервал $(18, 38)$.

Пример 185. Решить систему

$$2x+1>4x-5;\ 3x-4<2x+1.$$

Решение. Решения первого и второго неравенств будут соответственно $x<3$ и $x<5$. Следовательно, решение системы: $x<3$.

Пример 186. Решить систему

$$3x-2>6x+7;\ 5x+3<6x-10.$$

Решение. Решая первое и второе неравенства, получим: $x<-3$ и $x>13$. Эти неравенства противоречат друг другу. Следовательно, система не имеет решений.

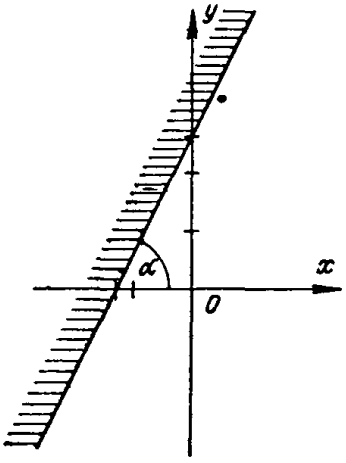

Рис 6

Пример 187. Решить систему

$$2x-3<3x-4;\ x+8>3x+2;$$

$$3x-2>x+2;\ 5x-1<4x+6.$$

Решение. Решив каждое из данных неравенств, получим $x>1$, $x<3$, $x>2$, $x<7$ Эти решения являются интервалами $(1, +\infty)$, $(-\infty, 3)$, $(2, +\infty)$, $(-\infty, 7)$. Их общей частью будет интервал $(2, 3)$. Следовательно, решения системы удовлетворяют соотношениям $2<x<3$.

Пример 188. Решить неравенство

$$2y-4x-5>0.$$

Решение. $2y>4x+5$, $y>2x+\frac{5}{2}$. Решением неравенства является любая пара чисел x и y, где x — произвольное вещественное число, а соответствующее значение $y>2x+\frac{5}{2}$. Решение можно записать и так: y — любое число, а соответствующее значение $x<\frac{1}{2}y-\frac{5}{4}$. Решения линейного неравенства с двумя неизвестными можно наглядно изобразить точками плоскости. Известно, что уравнению $y=2x+\frac{5}{2}$ на плоскости соответствует прямая линия, отсекающая на оси ординат направленный отрезок $+\frac{5}{2}$, считая от начала координат, и образующая такой угол α с осью абсцисс, что $\operatorname{tg}\alpha=2$ (рис. 6). Очевидно, неравенству $y>2x+\frac{5}{2}$ будут соответствовать точки, расположенные выше этой прямой (см. штриховку на рис. 6).

Пример 189. Решить систему

$$y-x-1<0;\ 3x+y-6>0.$$

Решение. Решая каждое неравенство относительно y, получим: $y<x+1$ и $y>6-3x$. Отсюда $6-3x<y<x+1$. Значения x найдем из неравенства $6-3x<x+1$, что даст $x>\frac{5}{4}$. Итак, решением будет любая пара чисел x, y, где

$x > \frac{5}{4}$ и соответствующие y удовлетворяют неравенствам $6 - 3x < y < x + 1$. На плоскости решениям (x, y) соответствуют точки, расположенные выше прямой $y = 6 - 3x$ (I) и ниже прямой $y = x + 1$ (II). Эта часть плоскости заштрихована (рис. 7).

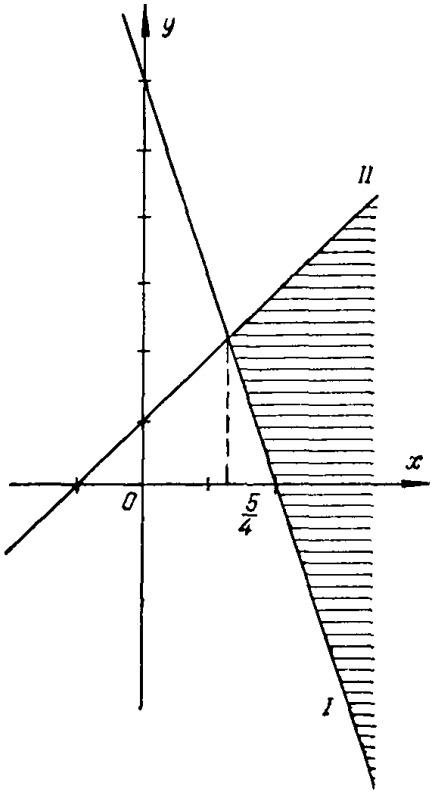

Рис. 7

Пример 190. Решить систему

$$2x + y - 2 > 0;$$
$$x - 2y + 2 < 0.$$

Решение. Из этих неравенств находим: $y > 2 - 2x$ и $y > \frac{1}{2}x + 1$. Получили неравенства одинакового смысла. Из них видим, что, взяв произвольное значение x, нужно выбрать для y наибольшее из значений $2 - 2x$ и $\frac{1}{2}x + 1$. Чтобы выяснить, какое из них будет наибольшим, решим неравенство $2 - 2x > \frac{1}{2}x + 1$, что даст $x < \frac{2}{5}$, а затем неравенство $\frac{1}{2}x + 1 > 2 - 2x$, что даст $x > \frac{2}{5}$. Итак, решениями системы будут: 1) $x < \frac{2}{5}$, $y > 2 - 2x$; 2) $x > \frac{2}{5}$, $y > \frac{1}{2}x + 1$. На рис. 8 изображены точки, соответствующие решениям системы (см. заштрихованную часть рис. 8). Они расположены выше прямых $y = 2 - 2x$ (I) и $y = \frac{1}{2}x + 1$ (II).

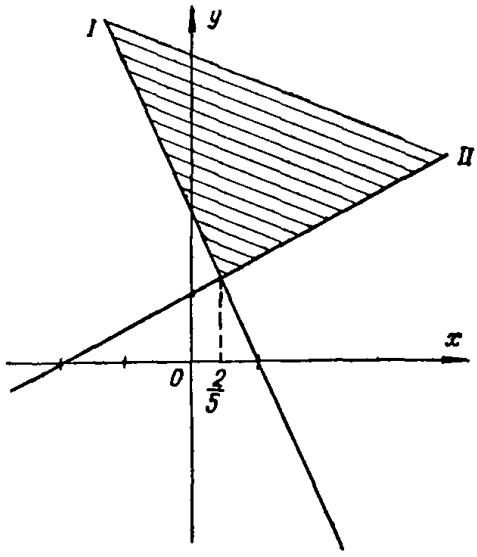

Рис. 8

Если решать неравенства относительно x, то получились бы неравенства неодинакового смысла и дальнейшие рассуждения пришлось бы вести так, как в примере 189.

Пример 191. Решить неравенство

$$|x-3|<4.$$

Решение. $|x-3|=x-3$, если $x\geqslant 3$, и $|x-3|=3-x$, если $x\leqslant 3$. В первом случае неравенство имеет вид $x-3<4$, откуда $x<7$, а во втором $3-x<4$, откуда $x>-1$. Следовательно, $-1<x<7$.

67. Неравенством второй степени с одним неизвестным называется алгебраическое неравенство, которое имеет вид $ax^2+bx+c>0$ $(a\neq 0)$, а также всякое целое алгебраическое неравенство, которое можно привести к такому виду, если перенести все его члены в левую часть, раскрыть скобки, привести подобные члены, а если нужно, то и умножить неравенство на -1.

Когда известны корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, написать решения неравенства $ax^2+bx+c>0$, если они существуют, не представляет никакого труда. Напомним: 1) если корни трехчлена комплексные (мнимые), то при всех вещественных x знак трехчлена совпадает со знаком коэффициента его старшего члена; 2) если корни равные, справедливо то же самое, исключая $x=-\frac{b}{2a}$, при котором трехчлен обращается в нуль; 3) если корни x_1 и x_2 трехчлена различны, причем $x_1<x_2$, то при всех x, взятых из промежутка $(x_1,\ x_2)$, знак трехчлена противоположен знаку коэффициента его старшего члена, а при $x<x_1$ и $x>x_2$ — одинаков со знаком этого коэффициента.

Пример 192. Решить неравенство

$$2x^2-2x+5>0.$$

Решение. Дискриминант $d=4(1-10)<0$. Следовательно, корни трехчлена комплексные и при всех вещественных x значением трехчлена будет положительное число, так как при x^2 коэффициент $+2$. Неравенство удовлетворяется тождественно.

Пример 193. Решить неравенство

$$\frac{2}{x}>3.$$

Решение. Так как $\frac{2}{x}>3$, то $x>0$. Умножая обе части неравенства на $x>0$, получим $2>3x$ или $x<\frac{2}{3}$. Поэтому решениями данного неравенства являются те значения x, которые удовлетворяют соотношениям $0<x<\frac{2}{3}$.

Пример 194. Решить неравенство

$$\frac{x^3+x^2+2x}{x^2+x-2}>1.$$

Решение. Перенесем все члены неравенства в левую часть и приведем их к общему знаменателю. Получим $\frac{x^3+x+2}{x^2+x-2}>0$. Это неравенство равносильно такому: $(x^3+x+2)(x^2+x-2)>0$ или $(x+1)(x^2-x+2)(x+2)(x-1)>0$. Но $x^2-x+2>0$ при всех вещественных x. Разделив последнее неравенство на x^2-x+2, придем к неравенству $(x+2)(x+1)(x-1)>0$. Оно, как видно из сделанных преобразований, равносильно данному. Корни выражения, находящегося в левой части неравенства, суть -2, -1, 1. Расположив их в порядке возрастания, построим интервалы: $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. При переходе x из одного интервала в другой, смежный с ним, численная величина левой части неравенства меняет знак, в то время как внутри каждого интервала имеет место постоянство знака этой величины. Следовательно, раз в первом интервале левая часть неравенства отрицательна, что очевидно, то во втором и четвертом она положительна. Итак, решения данного неравенства образуют два интервала: $(-2, -1)$ и $(1, +\infty)$.

Пример 195. Решить неравенство

$$3\sqrt{6+x-x^2}+2>4x.$$

Решение. Перепишем неравенство так: $3\sqrt{6+x-x^2}>4x-2$. Так как корень предполагается арифметическим, то левая часть неравенства считается неотрицательной, причем подкоренное выражение $6+x-x^2\geqslant 0$. Корни трехчлена $-x^2+x+6$ суть -2 и 3, и, следовательно, численная величина трехчлена будет неотрицательной для x, удовлетворяющих соотношениям $-2\leqslant x\leqslant 3$. Если при этом правая часть будет отрицательной, т. е. $4x-2<0$, то неравенство будет справедливо. Но отрицательной она будет при $x<\frac{1}{2}$, и, следовательно, с учетом ранее полученного неравенство удовлетворяется, если будет $-2\leqslant x<\frac{1}{2}$. Пусть теперь $4x-2\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant\frac{1}{2}$. Так как обе части неравенства положительны, то возведение его в квадрат приведет к неравенству $9(6+x-x^2)>(4x-2)^2$, равносильному исходному. Теперь получим: $9(6+x-x^2)>16x^2-16x+4$, $x^2-x-2<0$. Корни трехчлена x^2-x-2 суть -1, 2, и неравенство имеет место при $-1<x<2$, а учитывая ранее полученные неравенства $-2\leqslant x\leqslant 3$ и $x\geqslant\frac{1}{2}$, найдем $\frac{1}{2}\leqslant x<2$. Объединяя этот

результат с предыдущим $\left(-2 \leqslant x < \frac{1}{2}\right)$, получим, что решения x данного неравенства удовлетворяют соотношениям $-2 \leqslant x < 2$.

68. Ниже приведены примеры на доказательство алгебраических неравенств.

Пример 196. Доказать неравенство

$$\frac{a^2}{1+a^4} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Если $a \neq 0$, то

$$\frac{a^2}{a^4+1} = \frac{1}{a^2+\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a^2-2+\frac{1}{a^2}+2} = \frac{1}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Справедливость неравенства при $a = 0$ очевидна.

Пример 197. Доказать неравенство

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} < \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Обозначив левую часть неравенства через A и заметив, что

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)},$$

получим

$$A = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{2}.$$

Пример 198. Доказать неравенство

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} > \frac{3n+1}{2(n+1)};\ n > 1.$$

Доказательство. Воспользуемся очевидным неравенством

$$\frac{1}{k^2} > \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Тогда для левой части A доказываемого неравенства получим

$$A > 1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1} = \frac{3}{2}-\frac{1}{n+1} = \frac{3n+1}{2(n+1)}.$$

Пример 199. Доказать неравенство

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n! < (n+1)!$$

Доказательство. Преобразуем левую часть неравенства:

$$(2-1)\cdot 1!+(3-1)\cdot 2!+\ldots+[(n+1)-1]\cdot n! = 1!\cdot 2-1!+$$
$$+2!3-2!+\ldots+n!(n+1)-n! = 2!-1!+3!-2!+$$
$$+\ldots+(n+1)!-n! = (n+1)!-1 < (n+1)!$$

Пример 200. Доказать, что если $|x| < \varepsilon$, то $-\varepsilon < x < \varepsilon$.

Доказательство. 1. Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, и данное неравенство запишется так: $x < \varepsilon$. Кроме того, $-\varepsilon < 0$, а положительное число и нуль больше отрицательного, и поэтому $-\varepsilon < x$. Итак, если $x \geqslant 0$, то $-\varepsilon < x < \varepsilon$

2. Если $x < 0$, то $|x| = -x$, и из данного неравенства получим $-x < \varepsilon$ или $-\varepsilon < x$. Кроме того, $\varepsilon > 0$, а отрицательное число меньше положительного, поэтому $x < \varepsilon$. Таким образом, и в этом случае $-\varepsilon < x < \varepsilon$. Теорема доказана.

Пример 201. Доказать, что если $-\varepsilon < x < \varepsilon$, то $|x| < \varepsilon$.

Доказательство. Если $-\varepsilon < x < \varepsilon$, то $-\varepsilon < x$ и $x < \varepsilon$ или $x + \varepsilon > 0$ и $x - \varepsilon < 0$. Но тогда $(x + \varepsilon)(x - \varepsilon) < 0$ или $x^2 - \varepsilon^2 < 0$. Отсюда $x^2 < \varepsilon^2$, $|x| < \varepsilon$.

Пример 202. Доказать, что правильная арифметическая дробь увеличивается с увеличением числителя и знаменателя на одно и то же положительное число

Доказательство. Пусть $b > a > 0$ и $n > 0$. Нужно доказать, что $\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b}$. Для этого достаточно доказать, что разность $\frac{a+n}{b+n} - \frac{a}{b}$ положительна. Действительно,

$$\frac{a+n}{b+n} - \frac{a}{b} = \frac{bn - an}{b(b+n)} = \frac{n(b-a)}{b(b+n)} > 0,$$

так как $b > a > 0$ и $n > 0$.

Пример 203. Доказать, что дробь

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \quad + b_n}$$

не меньше наименьшей и не больше наибольшей из дробей

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \quad (b_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство. Обозначим наименьшую из дробей $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, ... , $\frac{a_n}{b_n}$ через m, а наибольшую — через M. Тогда можно написать:

$$m \leqslant \frac{a_1}{b_1} \leqslant M,\ m \leqslant \frac{a_2}{b_2} \leqslant M,\ \ldots,\ m \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant M.$$

Так как $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, ... , $b_n > 0$, то, освобождаясь от знаменателей, получим:

$$mb_1 \leqslant a_1 \leqslant Mb_1;$$
$$mb_2 \leqslant a_2 \leqslant Mb_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$mb_n \leqslant a_n \leqslant Mb_n.$$

Суммируя неравенства и вынося множители m и M за скобки, найдем

$$m(b_1+b_2+\ldots+b_n)\leqslant a_1+a_2+\ldots+a_n\leqslant M(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

Разделив это неравенство на $b_1+b_2+\ldots+b_n>0$, получим

$$m\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\leqslant M.$$

Пример 204. Доказать неравенство

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}>\frac{x+y}{2}\quad(x>0,\ y>0).$$

Доказательство

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4x^3+4y^3}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3+y^3+3(x^3+y^3)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3+y^3+3(x+y)(x^2-xy+y^2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3+y^3+3(x+y)[xy+(x-y)^2]}>$$

$$>\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3+y^3+3xy(x+y)}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x+y)^3}=\frac{x+y}{2}.$$

Равенство возможно только при $x=y$.

Пример 205. Доказать неравенство

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1;\ n>1.$$

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{2\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}},$$

то для левой части A доказываемого неравенства получим

$$A<1+\frac{2}{\sqrt{2}+1}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=1+2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n-(n-1)}\right)=1+2\left[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\right.$$

$$\left.+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\right]=$$

$$=1+2(-1+\sqrt{n})=2\sqrt{n}-1.$$

Пример 206. Доказать неравенство

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}\quad(x>0,\ y>0).$$

Доказательство.

$$\frac{x+y}{2}=\frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+2\sqrt{xy}}{2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+2\sqrt{xy}}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+\sqrt{xy}>\sqrt{xy}.$$

Знак равенства будет иметь место только при $x = y$.

Замечание Доказанное неравенство можно высказать словами так: среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел. Можно доказать, что это утверждение о соотношении среднего арифметического и среднего геометрического справедливо и для любого количества положительных чисел, т. е., если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительны, то

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

причем знак равенства возможен только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. (Доказательство см. в кн. К. У. Шахно. Сборник задач по математике повышенной трудности. Минск, 1963, задача 683.)

Пример 207. Доказать неравенство

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < n^n.$$

Доказательство Пользуясь соотношением между средним геометрическим и средним арифметическим положительных неравных чисел (см. пример 206), получаем

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \sqrt{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2} =$$
$$= \sqrt{1(2n-1)} \cdot \sqrt{3(2n-3)} \cdot \sqrt{5(2n-5)} \cdots \sqrt{(2n-1)1} <$$
$$< \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot \frac{3+(2n-3)}{2} \cdot \frac{5+(2n-5)}{5} \cdots \frac{(2n-1)+1}{2} =$$
$$= \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n} = n^n.$$

Пример 208. Разложить положительное число a на два положительных слагаемых так, чтобы произведение их оказалось наибольшим.

Решение. Пусть $x > 0$, $y > 0$ и $x + y = a$. Известно, что $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}$ или $xy \leqslant \frac{a^2}{4}$, причем знак равенства будет тогда и только тогда, когда $x = y = \frac{a}{2}$. Итак, произведение будет наибольшим, если число a разложить на равные слагаемые.

Пример 209. В данный полукруг вписать прямоугольник наибольшей площади.

Решение. Пусть r будет радиусом данного полукруга, а x — стороной AB искомого прямоугольника (рис. 9). Другая его сторона $AD = 2AO = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, а площадь $S = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$. Очевидно, площадь достигает своего наибольшего значения одновременно с $\frac{1}{4}S^2 = x^2(r^2 - x^2)$. Сумма $x^2 + (r^2 - x^2)$ равна положительному числу r^2, и произведение $x^2(r^2 - x^2)$ будет наибольшим при равенстве множителей (см. пример 208), т. е.

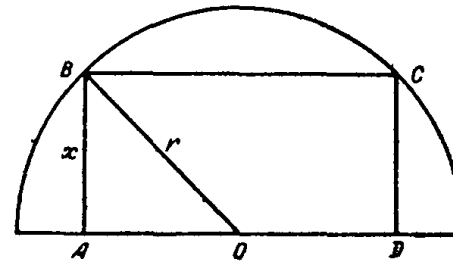

Рис 9

когда $x^2 = r^2 - x^2$. Отсюда $2x^2 = r^2$, $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Другая его сторона будет равна

$$2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2},$$

т. е. в два раза больше

§ 2. Простейшие трансцендентные неравенства

69. Указать сколько-нибудь общие способы решения и доказательства трансцендентных неравенств невозможно Те весьма частные приемы, которыми в этих случаях пользуются, будут проиллюстрированы на примерах.

Пример 210. Решить неравенство

$$\log_x 5 > \log_x 10.$$

Решение. Известно, что логарифм меньшего числа больше логарифма большего числа тогда и только тогда, когда основание логарифма меньше единицы. Отсюда $0 < x < 1$.

Пример 211. Решить неравенство

$$x^{\log_2 x + 4} < 32.$$

Решение. Допустимые значения $x > 0$. Поэтому левая часть неравенства — величина положительная. Возьмем логарифм по основанию 2 от обеих частей неравенства. Получим неравенство, равносильное данному: $(\log_2 x + 4)\log_2 x < \log_2 32$. Положив $y = \log_2 x$, придем к алгебраическому неравенству $y^2 + 4y - 5 < 0$, корни которого 1 и -5. Следовательно, решения y последнего неравенства удовлетворяют соотношениям $-5 < y < 1$. Отсюда $-5 < \log_2 x < 1$ и $2^{-5} < x < 2^1$ или $\frac{1}{32} < x < 2$.

Пример 212. Решить неравенство

$$4^x - 2 \cdot 5^{2x} < 10^x.$$

Решение. Разделим все члены неравенства на 10^x. Найдем $\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2\left(\frac{5}{2}\right)^x < 1$. Положив $\left(\frac{2}{5}\right)^x = y > 0$, получим неравенство $y - \frac{2}{y} < 1$ или $y^2 - y - 2 < 0$. Отсюда $(y+1)(y-2) < 0$, а так как $y + 1 > 0$, то найдем. $y - 2 < 0$, $y < 2$, $\left(\frac{2}{5}\right)^x < 2$, $x > \log_{0,4} 2$.

Пример 213. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 243^{1-x}.$$

Решение. Так как $243 = 3^5$, а $\frac{1}{3} = 3^{-1}$, то неравенство можно записать так

$$3^{-(x+1)} > 3^{-5(x-1)}.$$

Последнее же по свойству показательной функции равносильно такому:

$$-(x+1) > -5(x-1).$$

Отсюда $-x-1 > -5x+5$, $4x > 6$, $x > \frac{3}{2}$.

Пример 214. Решить неравенство

$$\log_x \sqrt{x+12} > 1.$$

Решение. Здесь допустимыми значениями для неизвестного x являются все положительные числа, не равные единице, т. е. должно быть $x > 0$, но $x \neq 1$. Так как $1 = \log_x x$, то данное неравенство принимает вид

$$\log_x \sqrt{x+12} > \log_x x. \qquad (*)$$

Если $x > 1$, то неравенство приведется к такому:

$$\sqrt{x+12} > x.$$

Так как обе части последнего неравенства положительны, то возведение его в квадрат приведет к неравенству

$$x^2 - x - 12 < 0,$$

равносильному данному, при условии $x > 1$. Переписав его так:

$$(x+3)(x-4) < 0,$$

видим, что оно справедливо лишь тогда, когда $-3 < x < 4$. Учитывая же условие $x > 1$, получаем $1 < x < 4$.

Если же $0 < x < 1$, то неравенство (*) эквивалентно такому:

$$\sqrt{x+12} < x.$$

Это неравенство не имеет решений, так как при $0 < x < 1$ левая его часть больше единицы, а правая меньше единицы. Следовательно, данное неравенство справедливо при x, удовлетворяющих соотношениям $1 < x < 4$.

Пример 215. Решить неравенство

$$\operatorname{tg}(\sin x) > 0.$$

Решение. Так как $|\sin x| \leqslant 1$, то данное неравенство эквивалентно такому: $0 < \sin x \leqslant 1$ или $\sin x > 0$. Последнее же имеет решения: $2k\pi < x < (2k+1)\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 216. Решить неравенство

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 < 0.$$

Решение. Положим $\sin x = y$. Неравенство $2y^2 - 3y + 1 < 0$ справедливо при $\frac{1}{2} < y < 1$. Отсюда $\frac{1}{2} < \sin x < 1$, $2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ и $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{5}{6}\pi$.

Пример 217. Решить неравенство

$$\cos 2x < \cos 4x.$$

Решение. Достаточно найти решения этого неравенства, принадлежащие промежутку $(0, \pi)$, так как число π является периодом для обеих частей неравенства. Действительно, $\cos 2(x + \pi) = \cos 2x$, $\cos 4(x + \pi) = \cos 4x$. Перенесем все члены в левую часть и преобразуем разность косинусов в произведение синусов. Придем к неравенству $\sin x \sin 3x < 0$. Но $\sin x$ в промежутке $(0, \pi)$ положителен, и, разделив на него, придем к неравенству $\sin 3x < 0$, равносильному данному. Отсюда решения x удовлетворяют соотношениям $k\pi + \frac{\pi}{3} < x < k\pi + \frac{2}{3}\pi$.

Пример 218. Решить неравенство

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} > 0.$$

Решение. Данное неравенство можно записать так:

$$\frac{2\sin x \cos x + 2\sin^2 x}{2\sin x \cos x - 2\sin^2 x} > 0 \text{ или } \frac{\sin x(\cos x + \sin x)}{\sin x(\cos x - \sin x)} > 0.$$

Отсюда видно, что допустимыми значениями для неизвестного x являются все вещественные числа, кроме тех, которые имеют вид $k\pi$ и $k\pi + \frac{\pi}{4}$, где k — любое целое число. Последнее эквивалентно такому неравенству:

$$\sin^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x) > 0,$$

а так как $\sin^2 x > 0$, то и такому:

$$\cos 2x > 0,$$

конечно, в области допустимых значений x для данного неравенства. Решения же неравенства $\cos 2x > 0$ удовлетворяют соотношениям $2k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ или $k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{4}$. Отсюда должны быть исключены числа $x = k\pi$. После исключения их получаем:

$$k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi \text{ и } k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{4},$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Пример 219. Решить неравенство

$$\log_2(\cos 2x + 2\sin x + 1) < 1.$$

Решение. Положим $\sin x = y$. Тогда $\cos 2x + 2\sin x + 1 = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x + 1 = -2y^2 + 2y + 2$. Учитывая, что $1 = \log_2 2$, можем записать данное неравенство так:

$$\log_2(-2y^2 + 2y + 2) < \log_2 2. \qquad (*)$$

Допустимые значения для y в этом неравенстве должны быть такими, чтобы выражение, находящееся под знаком логарифма, было положительным, т. е. должно быть справедливо неравенство

$$-2y^2 + 2y + 2 > 0.$$

Кроме того, так как в неравенстве (*) основание больше единицы, а в этом случае большему логарифму соответствует большее число, то решение данного неравенства равносильно решению следующей системы неравенств:

$$-2y^2 + 2y + 2 < 2; \quad -2y^2 + 2y + 2 > 0$$

или

$$y(y-1) > 0; \quad \left(y - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < 0.$$

Для первого неравенства находим, что $y < 0$ или $y > 1$. Но $y = \sin x$, и поэтому $|y| \leqslant 1$, так что остается только $y < 0$. Для второго неравенства должно быть $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < y < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ но так как $y < 0$, получим $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < y < 0$.

Таким образом решения неравенства (*) при условии $|y| <$ образуют промежуток $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < y < 0$. Чтобы найти решения данного неравенства вспомним что $y = \sin x$. Тогда $\frac{1-\sqrt{5}}{2} <$ $< y < 0$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \sin x < 0$; $2k\pi + \arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 2k\pi$ и $(2k-1)\pi < x < (2k-1)\pi - \arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, где $k = 0 \pm 1$, ± 2, ...

Пример 220. Решить неравенство

$$\arcsin(\log_2 x) > 0.$$

Решение. Если $\arcsin y > 0$, то $0 < y \leqslant 1$. Поэтому должно быть: $0 < \log_2 x \leqslant 1$, $1 < x \leqslant 2$.

70. Ниже приведены примеры на доказательства трансцендентных неравенств.

Пример 221. Доказать, что при $a > 1$

$$\lg_{10} a + \lg_a 10 > 2.$$

Доказательство. Так как $\lg_{10} a > 0$, $\lg_a 10 > 0$ и $\lg_{10} a \times$ $\times \lg_a 10 = 1$, то $\lg_{10} a + \lg_a 10 > 2\sqrt{\lg_{10} a \lg_a 10} = 2$.

Пример 222. Доказать, что

$$\cos(\cos x) > 0.$$

Доказательство. Так как $\cos\alpha > 0$, если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$, то $\cos(\cos x) > 0$ при всех вещественных x.

Пример 223. Доказать, что для углов α, β, γ треугольника справедливо неравенство

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geqslant 1.$$

Доказательство. Так как $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} > 0$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} > 0$ и $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, то, пользуясь соотношением среднего арифметического и среднего геометрического, получим

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}} + \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} + \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\pi-\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + 1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 1.$$

Пример 224. Доказать, что

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma < 2,$$

где α, β, γ — углы тупоугольного треугольника.

Доказательство. Учитывая, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, находим

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta) +$$

$$+ 1 - \cos^2\gamma = 2 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) - \cos^2[\pi - (\alpha + \beta)] =$$

$$= 2 - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) =$$

$$= 2 - \cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] =$$

$$= 2 - \cos(\pi - \gamma)\,2\cos\alpha\cos\beta = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Так как один из углов α, β, γ тупой, а два других острые, то

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma<0,$$

и получим

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma<2.$$

Пример 225. Доказать, что для углов α, β, γ треугольника справедливо неравенство

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}.$$

Доказательство. Так как для углов треугольника $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то, обозначая левую часть неравенства буквой A, будем иметь

$$A=\cos\alpha+\cos\beta+\cos[\pi-(\alpha+\beta)]=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)=$$

$$=1-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left[\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right]=$$

$$=1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2.$$

Но учитывая, что

$$\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\geqslant 0 \text{ и } 0\leqslant\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1,$$

получаем

$$A\leqslant 1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

а это и требовалось доказать.

Пример 226. Доказать, что для углов α, β, γ треугольника справедливо неравенство

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Доказательство.

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma.$$

Из трех углов α, β, γ по меньшей мере два острых. Пусть это будут углы α и β. Тогда $0<\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1$, и можно написать, что

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\gamma.$$

Прибавим к правой части последнего неравенства $\sin 60°$ и вычтем из нее $\sin 60°$. Получим

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\gamma+\sin 60°-\sin 60°=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma+60°}{2}\cos\frac{\gamma-60°}{2}-\sin 60°.$$

Но $0<\gamma<180°$ и, следовательно, $\left|\frac{\gamma-60°}{2}\right|<90°$. Поэтому $0<\cos\frac{\gamma-60°}{2}\leqslant 1$. Найдем, что

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma+60°}{2}-\sin 60°=$$

$$=2\sin\frac{180°-\gamma}{2}+2\sin\frac{\gamma+60°}{2}-\sin 60°=$$

$$=4\sin\frac{(180°-\gamma)+(\gamma+60°)}{4}\cos\frac{(180°-\gamma)-(\gamma+60°)}{4}-\sin 60°=$$

$$=4\sin 60°\cos\frac{120°-2\gamma}{4}-\sin 60°.$$

Так как $\cos\frac{120°-2\gamma}{4}=\cos\frac{\gamma-60°}{2}$, а ранее было установлено, что $0<\cos\frac{\gamma-60°}{2}\leqslant 1$, то получим

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant 4\sin 60°-\sin 60°=3\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Упражнения

Решить неравенства (241—244):

241. $\frac{3x-1}{4}-\frac{3(x-2)}{8}-1>\frac{5-3x}{2}$.

242. $1+x-\frac{x-3}{4}>\frac{x+1}{4}-\frac{x-2}{3}$.

243. $|2x-3|<x$.

244. $2x-y+3<0$.

Решить системы неравенств (245—249):

245. $\frac{5x}{4}-\frac{6x-1}{4}<\frac{4x+1}{12}-\frac{1}{6}$; $\frac{2x+1}{5}-\frac{2-x}{3}>1$

246. $\frac{3}{4}x+\frac{7}{3}-\frac{x}{2}>\frac{8}{5}-\frac{x}{3}+\frac{613}{120}$; $\frac{3x-1}{5}-\frac{x+1}{2}<1-\frac{x}{7}$

247. $\frac{8x-1}{5}-\frac{x+1}{2}<1-\frac{x}{7}$; $\frac{5x-1}{4}-\frac{3x-13}{10}<\frac{5x+1}{3}$.

248. $2x+y-4>0$; $3x-y-1>0$.

249. $3x-4y-2<0$; $2x+3y-7>0$.

Решить неравенства (250—252):

250. $\frac{1}{1-x}>1$

251. $x^3-5x^2+10x-12<0$.

252. $\frac{(x^3-1)(x-2)(2x-1)}{(x+1)x}>0$.

253. Решить систему $x^2 - 4x + 3 > 0$; $x^2 - 6x + 8 < 0$.

254. Решить неравенство $2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

255 При каких a неравенство $ax^2 + (a-1)x + a - 1 < 0$ выполняется тождественно?

256. Определить m так, чтобы неравенство $mx^2 + mx + 7 > (m-1)x^2 + 2x - (m+1)$ удовлетворялось тождественно.

Доказать неравенства (257—262):

257. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

258. $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

259 $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$ $(a_1 \geqslant 0,\ a_2 \geqslant 0,\ a_3 \geqslant 0,\ a_4 \geqslant 0)$.

260. $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ $(a_1 \geqslant 0,\ a_2 \geqslant 0,\ a_3 \geqslant 0)$.

261. $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a+b+c)$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0)$.

262. $\dfrac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

263. Доказать, что неправильная арифметическая дробь уменьшается с увеличением числителя и знаменателя на одно и то же положительное число

Решить неравенства (264—271);

264. $\log_2 x + \log_2 (2x-1) < \log_2 (2x+2)$

265. $x^{2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2} > \dfrac{1}{x}$

266. $3^{2x} > 3^x + 2$.

267. $\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3}+1)\operatorname{tg} x + \sqrt{3} > 0$.

268. $\sin(\cos x) < 0$.

269. $\sin x > \sin 3x$

270. $\arcsin(\pi \operatorname{arctg} x) > 0$.

271. $\log_2 (2 \cos x) < 0$.

Доказать неравенства (272—275)·

272. $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_3 \pi} + \dfrac{1}{\log_{10} \pi} > 4$

273. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 2$, где α, β, γ — углы остроугольного треугольника

274 $1 + \operatorname{ctg} \varphi < \operatorname{ctg} \dfrac{\varphi}{2}$, если $0 < \varphi < \pi$.

275 $-\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant a \cos \alpha + b \sin \alpha \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

276 Найти наибольшее значение выражения

$$\log_3^3 x + 2 \log_3 x \log_3 \frac{3}{x}.$$

Глава VI

Функции и их графики

§ 1. Схема исследования функции и построения ее графика

71. Постоянной величиной называется такая величина, которая в условиях данной задачи принимает только одно значение. Переменной величиной называется такая величина, которая в условиях данной задачи принимает различные значения. Переменная считается заданной, если известно множество значений, которые она может принимать. Это множество называется областью изменения рассматриваемой переменной. На постоянную можно смотреть как на переменную, множество значений которой состоит из одного элемента (числа). В этом смысле *постоянная есть частный случай переменной.* Переменные и постоянные обычно обозначаются буквами, которым приписываются числовые значения.

Переменная величина y называется функцией переменной величины x (в области изменения x), если каждому значению x (из этой области) соответствует одно или несколько определенных значений y.

В первом случае функция называется однозначной, во втором многозначной.

Величина x называется аргументом или независимой переменной. Определение не исключает того случая, когда y равен постоянной.

Область изменения аргумента x называется областью определения функции y.

Тот факт, что величина y есть функция величины x, обозначают так: $y = f(x)$ и читают «y есть эф от x». Конечно, употребляют и другие буквы: $F(x)$, $\varphi(x)$ и т. д. Закон соответствия между величинами x и y может быть самым разнообразным. В элементарной математике функцию принято задавать в виде аналитического выражения или формулы. Этот способ задания функции называется аналитическим.

Про величины y и x, из которых одна функция, а другая аргумент, говорят, что они связаны функциональной зависимостью.

Если в данной функциональной зависимости поменять ролями функцию и аргумент, то вновь полученная функция называется обратной по отношению к первоначальной. В свою очередь и исходная функция является обратной по отношению к полученной.

Если каждому вещественному решению (x, y) уравнения $y = f(x)$, связывающему аргумент x с функцией y, привести в соответствие точку плоскости с абсциссой x и ординатой y, то геометрическое место таких точек называется графиком уравнения $y = f(x)$ или графиком функции $f(x)$. График может быть сплошной линией и тогда уравнение, которому она соответствует, называется уравнением этой линии, но он может быть и совокупностью изолированных точек, а также комбинацией линий и точек. Очевидно, график однозначной функции с любой прямой, параллельной оси ординат, имеет не более одной общей точки.

Можно доказать, что графики прямой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Пример 227. Построить график функции:

$$\text{а) } y = x; \quad \text{б) } y = kx.$$

Решение. а) Известно, что координаты (x, y) точки плоскости равны расстояниям ее до осей координат, взятым с определенными знаками. Так как у точек первого квадранта $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то уравнению $y = x$ в первом квадранте соответствуют лишь те точки, у которых расстояния до осей координат одинаковы. У точек третьего квадранта $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$. Поэтому, записав уравнение $y = x$ в виде $-y = -x$, где $-x \geqslant 0$ и $-y \geqslant 0$, видим, что и здесь это точки, равноудаленные от осей координат. Во втором и четвертом квадрантах абсциссы и ординаты разных знаков и там нет точек графика уравнения $y = x$. Вспоминая, что биссектриса угла есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла, заключаем, что график функции $y = x$ есть биссектриса первого и третьего координатных углов.

б) Если $k = 0$, т. е. уравнение имеет вид $y = 0$, то графиком служит ось абсцисс, так как на ней и только на ней находятся точки с ординатами, равными нулю.

Пусть $k > 0$. Числа $x = 0$, $y = 0$ удовлетворяют уравнению $y = kx$. Это значит, что график проходит через начало координат. Предполагая теперь $x \neq 0$, перепишем уравнение так: $\frac{y}{x} = k$. Из этой записи видим, что график есть геометрическое место таких точек, для которых отношение ординаты к абсциссе есть величина постоянная, равная k. Но, с другой стороны, это отношение по определению есть тангенс угла наклона радиус-вектора, проведенного из начала координат в точку (x, y), к оси абсцисс. Из тригонометрии известно, что тангенс не зависит от длины радиус-вектора. Поэтому все точки прямой l, проходящей через начало координат и наклоненной к оси абсцисс под углом $\alpha = \operatorname{arctg} k$, принадлежат графику функции $y = kx$. Точки же, не лежащие на l, не принадлежат этому графику. Действительно,

возьмем любую точку $M(x_1, y_1)$ (рис. 10), не лежащую на l. Пусть для определенности она находится в первом квадранте. Проведем прямую MN, параллельную оси ординат, и пусть точка пересечения MN и l есть N В силу параллельности MN и Oy у всех точек прямой MN одинаковые абсциссы, равные x_1. Такая же абсцисса и у точки N. Но у всех точек прямой MN разные ординаты. Следовательно, у точки N ее ордината $y \neq y_1$. Теперь можем написать: $\frac{y_1}{x_1} \neq \frac{y}{x_1} = k$ или $y_1 \neq kx_1$, а это и означает, что точка M не принадлежит графику. Итак, график функции $y = kx$ есть прямая, проходящая через начало координат и наклоненная к оси абсцисс под таким углом α, что $\operatorname{tg}\alpha = k$.

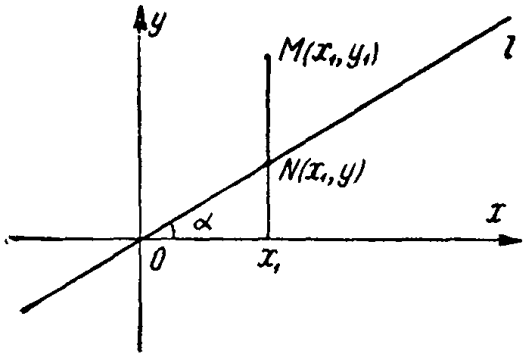

Рис. 10

Если $k < 0$, то легко убедиться, что график есть тоже прямая, наклоненная к оси Ox под углом $\alpha = \operatorname{arctg} k$ и проходящая через точку O.

Замечание. Так как прямо пропорциональные величины x и y связаны зависимостью $y = kx$, то графиком прямой пропорциональной зависимости величин является прямая.

72. Следующие функции, изучаемые в школьном курсе математики, называются основными элементарными: C—постоянная; x^a — степенная; a^x — показательная; $\log_a x$ — логарифмическая; $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — прямые тригонометрические; $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ — обратные тригонометрические. Во всех этих выражениях аргументом является x, а буквой a обозначена постоянная.

Если выполнить операцию основной элементарной функции не над аргументом, а над другой или над той же основной элементарной функцией, то получится функция, которая называется сложной элементарной функцией или функцией от функции. Например, функция $\log_a \cos x$ сложная, так как здесь берется логарифм не от аргумента x, а от функции $\cos x$. Таким образом, если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то $y = f[\varphi(x)]$ есть сложная функция от x.

Основные элементарные функции и функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью образования сложных функций и арифметических действий, примененных конечное число раз, называются элементарными.

Очень важно хорошо изучить свойства и графики основных элементарных функций. Они широко используются при исследовании других элементарных функций. Большинство основных элементарных функций будет подробно рассмотрено ниже. Сейчас же отметим некоторые их общие свойства. Все они однозначны. Это следует из однозначной выполнимости операций (действий), которые производятся над аргументом. Их области определения или один промежуток, или несколько промежутков, или бесконечное множество промежутков. Например, у $\sin x$ это промежуток $(-\infty, +\infty)$; у функции $y=\frac{1}{x}$ их два — $(-\infty,0)$ и $(0, +\infty)$; у $\operatorname{ctg} x$ область определения состоит из бесконечного множества промежутков вида $(k\pi, (k+1)\pi)$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Такой же характер имеет и область изменения функции. Если в какой-нибудь точке x_0 значение функции есть $f(x_0)$, то для значений x аргумента, достаточно близких к x_0, соответствующие значения $f(x)$ функции будут как угодно близки к $f(x_0)$. Это свойство функции называется ее непрерывностью. Именно оно позволяет нам при построении графика функции соединять близкие точки графика плавной линией и дает уверенность в том, что график в этом месте есть сплошная (непрерывная) линия.

Так как элементарная функция задается аналитически, то ее областью определения будет множество всех тех вещественных значений аргумента, при которых применяемые операции имеют смысл, а само математическое выражение получает вещественное значение. Поэтому при отыскании области определения функции следует помнить следующее:

1) знаменатель дробного выражения не должен обращаться в нуль;

2) выражения, находящиеся под знаком корня четной степени, должны быть неотрицательными;

3) выражения, возводимые в иррациональную степень, а также в степень, содержащую в показателе аргументы, должны быть положительными, а при положительном показателе — неотрицательными;

4) выражения, находящиеся под знаком логарифма, должны быть положительными;

5) выражения, находящиеся под знаком арксинуса или арккосинуса, не должны по абсолютной величине превосходить единицу;

6) выражения, находящиеся под знаком тангенса или секанса, не должны равняться $\frac{2k+1}{2}\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

7) выражения, находящиеся под знаком котангенса или косеканса, не должны равняться $k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Иногда условия задачи налагают ограничения на область определения функции. Так, в уравнении движения $s = \frac{1}{2} gt^2$ мы должны считать время $t \geqslant 0$.

Пример 228. Найти область определения функции:

а) $y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$; б) $y = \sqrt[4]{\frac{x^2+2x}{x+1}}$; в) $y = \frac{x}{\sin 2x}$.

Решение. а) Должно быть: $x^2 - 4 \neq 0$. Следовательно, область определения состоит из трех промежутков $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$.

б) Должно быть $\frac{x^2+2x}{x+1} \geqslant 0$ и $x + 1 \neq 0$ или $(x+2)(x+1)x \geqslant 0$ и $x \neq -1$. Так как решения неравенства (при условии $x \neq -1$) составляют промежутки $[-2, -1)$ и $[0, +\infty)$, то эти промежутки и дадут область определения функции.

в) Область определения есть множество всех вещественных чисел, исключая корни уравнения $\sin 2x = 0$. Последние же суть числа $\frac{k\pi}{2}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 229. Найти область определения функции

а) $y = \sqrt{1 - x^{\lg 2}}$; б) $y = (1 - x^3)^{x^2}$; в) $y = \frac{x+1}{\sqrt[x]{2^{x-2}} - 1}$.

Решение. а) Так как $\lg 2$ — число иррациональное, то область определения найдется из условий. $x \geqslant 0$, $1 - x^{\lg 2} \geqslant 0$ Это даст промежуток $[0, 1]$

б) Так как должно быть $1 - x^3 \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant 1$, то область определения есть промежуток $(-\infty, 1]$.

в) Выражение, определяющее функцию, не имеет смысла только при $x = 0$ и $x = 2$. Поэтому область определения состоит из промежутков $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$.

Пример 230. Найти область определения функции

а) $y = \lg(1-x)^2$, б) $y = 2\lg(1-x)$.

Решение. а) Должно быть $(1-x)^2 > 0$, что имеет место при $x \neq 1$. Следовательно, область состоит из промежутков $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$.

б) Правая часть равенства имеет смысл лишь при $1 - x > 0$, т. е. когда $x < 1$. Отсюда получаем, что область определения есть промежуток $(-\infty, 1)$.

Пример 231. Найти область определения функции:

а) $y = \arcsin \frac{x^3}{2}$; б) $y = \sqrt{\arccos \lg(1-x)}$.

Решение. а) Функция $\arcsin \frac{x^3}{2}$ имеет смысл при $-1 \leqslant \frac{x^3}{2} \leqslant 1$. Отсюда $-\sqrt[3]{2} \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{2}$. Следовательно, область определения есть промежуток $[-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$.

б) Должно выполняться неравенство $\arccos \lg(1-x) \geqslant 0$. Так как $\arccos \alpha$ всегда неотрицательный, но при этом $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то требуется, чтобы было $-1 \leqslant \lg(1-x) \leqslant 1$. Последнее имеет место, если $\frac{1}{10} \leqslant 1-x \leqslant 10$. Отсюда $-\frac{1}{10} \geqslant x-1 \geqslant -10$; $-9 \leqslant x \leqslant \frac{9}{10}$. Итак, область определения — промежуток $\left[-9, \frac{9}{10}\right]$.

Пример 232. Найти область определения функции:

а) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{ctg} x}$; б) $y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$; в) $y = \sqrt{\cos 2x}$.

Решение. а) Котангенс не имеет смысла, когда $x = k\pi$. Дробь не имеет смысла, когда $\operatorname{ctg} x = 1$ или $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$. Область определения есть множество всех вещественных чисел, исключая $x = k\pi$ и $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, где k, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

б) Функция имеет смысл при всех тех значениях x, при которых имеют смысл $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x}$. Но $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ не имеет смысла при $\frac{1}{x} = \frac{2k+1}{2}\pi$, а $\frac{1}{x}$ при $x = 0$. Поэтому если из множества всех вещественных чисел исключить $x = 0$ и $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то получим область определения данной функции.

в) Область определения функции есть множество решений неравенства $\cos 2x \geqslant 0$, что даст $k\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant k\pi + \frac{\pi}{4}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

73. Известный способ построения графика функции *по точкам* может иногда привести к ошибкам, если набор точек был сделан без учета индивидуальных свойств функции, характерных для нее. Поэтому важно сперва *исследовать* функцию. Однако задача ее исследования не является вполне определенной можно иметь в виду выяснение самых разнообразных свойств функции. Поэтому в каждом отдельном случае должно быть указано, какие свойства подлежат выясиению. Так, например, нас может интересовать только промежуток возрастания функции. Тогда все исследование сведется к отысканию такого промежутка, если он существует. Сейчас иас интересует исследование элементарных фуикций в связи с построением их графиков. Имея это в виду, мы перечислим и разъясним те вопросы, которые обычно представляют интерес в рассматриваемом случае.

I. *Область определения и область изменения функции.* В п. 72 были изложены общие принципы отыскания области определения. Сделаем дополнительно еще следующие разъяснения. Между смежными промежутками области определения функции точка, отделяющая эти промежутки (она не принадлежит области), мо-

жет оказаться такой, что в ней *функция обращается в бесконечность*. Уточним это понятие. Говорят, что функция $f(x)$ обращается в бесконечность в точке $x=a$, если для любого $N>0$ можно указать такое $\delta>0$, что из неравенств $0<|x-a|<\delta$ следует неравенство $|f(x)|>N$. В этом случае $f(x)$ называют также бесконечно большой величиной и записывают: $f(x)\to\infty$ при $x\to a$. Смысл этого определения сводится к тому, что значения функции $f(x)$ по своей абсолютной величине ста-

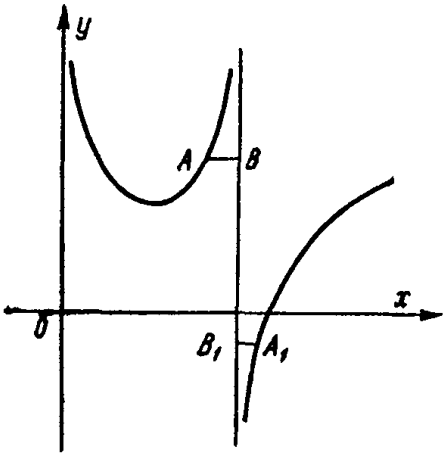

Рис. 11

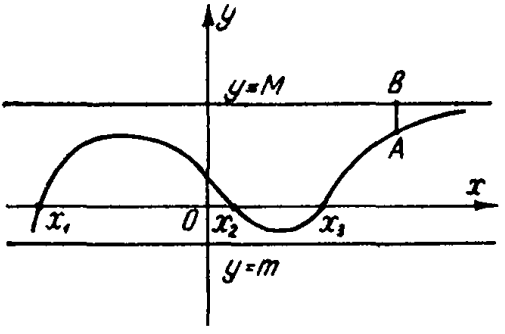

Рис 12

нут больше любого данного числа и будут оставаться больше его, если только значения аргумента x будут *достаточно близки* к точке a. Наличие такой точки a означает, что существует прямая $x=a$, параллельная оси ординат, обладающая таким свойством, что расстояние AB (рис. 11) точки A графика функции до этой прямой становится и остается меньше любого данного числа (иначе *стремится к нулю*) по мере удаления точки кривой в бесконечность. Эта прямая называется вертикальной асимптотой кривой (графика). Асимптота может быть и горизонтальной, если она параллельна оси абсцисс (см. рис. 12), и наклонной, когда она пересекает обе оси координат. При отыскании горизонтальных асимптот следует иметь в виду, что если $y=b$ есть горизонтальная асимптота, то $x\to\infty$ при $y\to b$.

Заметим, что график функции не будет иметь вертикальной асимптоты, если она ограничена во всей области определения. При этом функция $f(x)$ называется ограниченной в некотором промежутке, если существуют такие числа m и M, что для всех x этого промежутка выполняются неравенства

$$m<f(x)<M. \qquad (*)$$

В противном случае функция $f(x)$ называется неограниченной в рассматриваемом промежутке. Вместо двойного неравенства (*) можно писать одно такое $|f(x)|<N$. График ограниченной функции не выходит из полосы, заключенной между параллельными прямыми с уравнениями $y=m$ и $y=M$ (рис. 12).

Что касается области изменения функции, то обычно ее не требуется специально отыскивать, так как она автоматически выявляется по мере исследования функции по другим пунктам.

II. *Четность и нечетность.* Функция $f(x)$ называется четной (нечетной), если при любых двух противоположных значениях

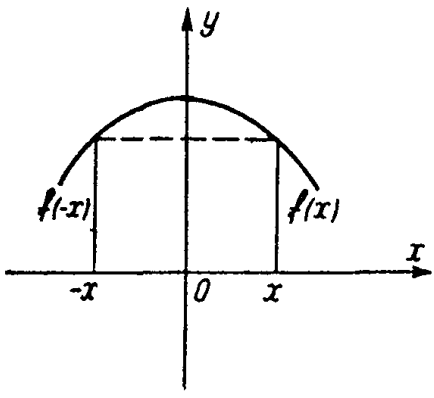

Рис 13

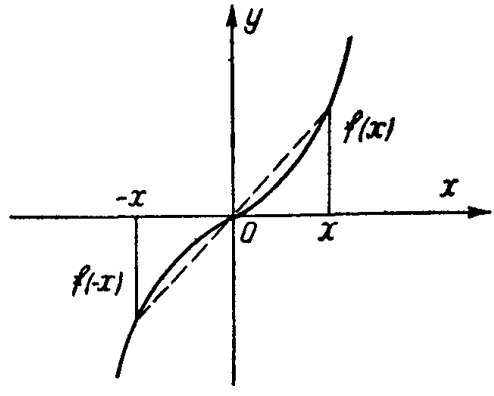

Рис 14

аргумента, принадлежащих области определения функции, значения функции равны (противоположны), т. е. $f(-x) = f(x)$ [$f(-x) = -f(x)$].

График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 13), а нечетной — относительно начала координат (рис. 14). Это позволяет при исследовании четной или нечетной функции ограничиться изучением ее только для положительных (отрицательных) значений аргумента.

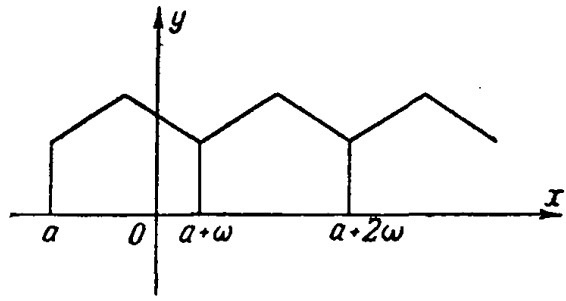

Рис. 15

III. *Периодичность.* Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число $\omega \neq 0$, что от прибавления (или вычитания) его к любому значению аргумента значение функции не изменяется: $f(x \pm \omega) = f(x)$. Число ω (обычно наименьшее положительное) называется периодом функции $f(x)$. Конечно, при этом предполагается, что не только число x, но и числа $x \pm \omega$ принадлежат области определения функции $f(x)$. При наличии у функции периода ω достаточно ее исследовать в любом промежутке $[a, a + \omega)$, если же она, кроме того, четная или нечетная, то на половине такого промежутка. Над каждым промежутком длиной ω график периодической функции имеет одинаковый вид (рис. 15).

IV. *Возрастание и убывание.* Функция $f(x)$ называется воз-

растающей (убывающей) в некотором промежутке, если она определена в этом промежутке и если для любой пары x_1 и x_2 принадлежащих ему значений из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $[f(x_1) > f(x_2)]$. Если же из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $[f(x_1) \geqslant f(x_2)]$, то функцию называют неубывающей (невозрастающей) или возрастающей (убывающей), но в широком смысле.

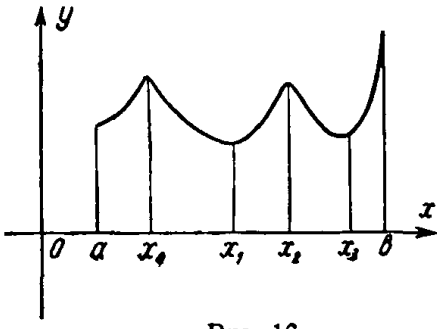

Рис 16

Функция возрастающая (убывающая) в некотором промежутке называется монотонной в этом промежутке.

График возрастающей функции поднимается вверх, а убывающей опускается вниз по мере продвижения по кривой слева направо. При этом здесь, и далее предполагается обычное расположение осей координат. ось абсцисс горизонтальна с положительным направлением, идущим слева направо, а ось ординат вертикальна с положительным направлением, идущим снизу вверх.

V. *Максимумы и минимумы.* Говорят, что функция $f(x)$ имеет максимум (минимум) в точке x_0, если существует такой промежуток (m, n), содержащий точку x_0 внутри себя (т. е. $m < x_0 < n$) и сам содержащийся в области определения функции, что для всех x из этого промежутка выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$ $[f(x_0) \leqslant f(x)]$.

Максимум (минимум) функции может быть только во внутренней точке промежутка и он является *местным* наибольшим (наименьшим) значением функции, т. е. наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех точках, достаточно близких к рассматриваемой.

Наибольшее значение непрерывной функции в замкнутом промежутке находится или среди максимумов или на концах промежутка. Аналогично наименьшее значение функции в этом случае находится или среди минимумов или на концах промежутка.

На рис. 16 изображен график функции, имеющей максимумы в точках x_0 и x_2, а минимумы в точках x_1 и x_3. Наименьшее значение функции совпадает со значением минимума $f(x_1)$, а наибольшее — со значением $f(b)$ на правой границе промежутка $[a, b]$.

VI. *Выпуклость и вогнутость.* Функция $f(x)$ называется выпуклой (вогнутой) в некотором промежутке, если для любой пары x_1 и x_2 принадлежащих ему неравных значений аргумента выполняется неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ $\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]$. Графически это означает, что в промежутке

выпуклости (вогнутости) функции любая дуга ее графика лежит *над (под)* стягивающей ее хордой. Так, на рис. 17 в промежутке $[a, b]$ имеет место выпуклость, а в промежутке $[b, c]$ — вогнутость функции (и графика).

VII. *Корни функции.* Число $x = a$ называется корнем функции $f(x)$, если значение этой функции при $x = a$ равно нулю: $f(a) = 0$. Графически существование корня функции означает наличие точки пересечения ее графика с осью абсцисс, причем сам корень дает абсциссу этой точки.

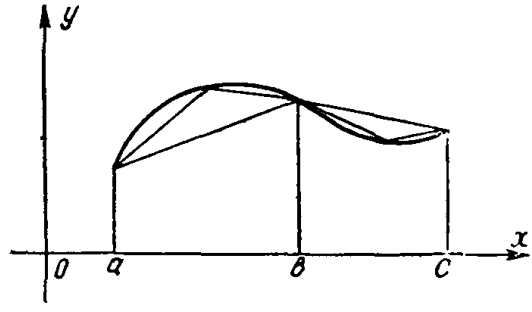

Рис. 17

Элементарная функция обладает таким свойством, что она сохраняет знак в любом промежутке $[x_1, x_2]$, заключенном между ее двумя смежными корнями x_1 и x_2, если сам этот промежуток принадлежит области определения функции. График функции в таком промежутке находится целиком по одну сторону оси абсцисс. Например, на рис. 12 в промежутке $[x_1, x_2]$ график находится выше оси абсцисс, а в промежутке $[x_2, x_3]$ — ниже ее.

Для построения графика желательно также знать точки пересечения его с осью ординат. Следует помнить, что абсциссы таких точек равны нулю.

VIII. *Поведение функции вблизи граничных точек области определения.* В школьном курсе математики обычно рассматриваются такие функции, у которых область определения состоит из одного или нескольких промежутков, конечно, если эти функции не периодические. Например, область определения функции $\operatorname{tg} x$ состоит из бесконечного множества промежутков вида $\left(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Пусть область определения функции $f(x)$ есть один промежуток $[a, b]$ или (a, b), причем a и b — числа, а не символы $\pm\infty$. Точки $x = a$ и $x = b$ мы будем называть в этом случае граничными или границами области. Если они принадлежат области определения, то можно вычислить значения $f(a)$ и $f(b)$ на границах. Если же одна граница, например $x = a$ (или обе), не принадлежит этой области, то находим значения $f(x)$ для ряда значений x, достаточно близких к a и, таким образом, выясняем поведение функции вблизи точки $x = a$ (иначе при $x \to a$). Иногда это удается сделать в общем виде, а не подсчетами для отдельных значений x. Например, для функции $\log_a x$ мы доказываем, что $\log_a x$ есть бесконечно большая величина при $x \to 0$. Если область определения состоит из нескольких таких промежутков, то границы каждого промежутка мы

относим к границе области и выясняем поведение функции вблизи них указанным выше способом. В частности, точки, в которых функция обращается в бесконечность (см. п. I), тоже граничные. Наконец, если промежуток неограниченный, т. е. вида $(a, +\infty)$, или $(-\infty, b)$, или $(-\infty, +\infty)$, то в этом случае выясняем поведение функции для x, достаточно больших по абсолютной величине, или иначе для $x \to \pm\infty$.

В заключение заметим, что перечисленное в п. I—VIII есть максимум того, что обычно желательно знать о функции. Однако далеко не всегда удается ответить на вопросы всех этих пунктов. Это объясняется тем, что аналитическое выражение, которым задается функция, может иметь весьма сложный вид и, следовательно, уравнения и неравенства, которые будут возникать в связи с необходимостью ответить на вопросы, могут оказаться практически неразрешимыми. Вместе с тем полезно иметь в виду, что надобность в некоторых пунктах может отпасть. Так, если удалось найти промежутки возрастания и убывания непрерывной функции, то границы этих промежутков соответствуют максимумам и минимумам. Наиболее важными пунктами в этой схеме, выяснения которых часто бывает достаточно для построения графика, являются пункты I, IV, VII и VIII.

Пример 233. Выяснить, является ли функция четной или нечетной

а) $\frac{\sin x}{x}$; б) $x \lg \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$; в) $\lg\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$; г) $\sin(x+1)$.

Решение. а) $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$. Функция четная.

б) $f(-x) = -x \lg \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2} = -x \lg\left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right)^{-1} = x \lg \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = f(x)$. Функция четная.

в) $f(-x) = \lg\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = \lg \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = -\lg\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = -f(x)$. Функция нечетная.

г) Так как $f(-x) = \sin(-x+1) \neq \pm \sin(x+1) = \pm f(x)$, то функция ни четная, ни нечетная.

Пример 234. Найти период функции, если она периодическая:

а) $y = \cos ax$; б) $y = \sin^2 x$; в) $y = \sin \frac{x}{2} + \sqrt{\cos \frac{x}{3}}$;

г) $y = \sin x + \sin \sqrt{3}x$.

Решение. а) Так как $\cos ax = \cos(ax + 2\pi) = \cos a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)$, то функция периодическая и ее период $\omega = \frac{2\pi}{a}$.

б) $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, и так как период $\cos 2x$ есть $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$, то и период $\sin^2 x$ есть π.

в) Период $\sin\frac{x}{2}$ есть $\omega_1 = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$, период $\cos\frac{x}{3}$, а следовательно, и $\sqrt{\cos\frac{x}{3}}$ есть $\omega_2 = 6\pi$. Наименьшее положительное число ω, кратное 4π и 6π, есть 12π. Поэтому период функции $\omega = 12\pi$.

г) Период $\sin x$ равен 2π, а период $\sin\sqrt{3}x$ равен $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Если бы сумма этих функций была периодической, то ее период $\omega \neq 0$ должен был бы при делении на 2π и на $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ дать целые числа. Это значит, что $\omega = 2\pi m$ и $\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} n$, где m и n — целые числа. Но тогда $2\pi m = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} n$ или $m\sqrt{3} = n$, что невозможно, так как в левой части равенства находится иррациональное число, а в правой — рациональное. Итак, данная функция непериодическая.

Пример 235. Выяснить, имеются ли вертикальные асимптоты у графика функции:

$$\text{а) } y = \frac{1}{2x(x-1)}; \quad \text{б) } y = \lg(3x - x^2 - 2).$$

Решение. а) Область определения функции состоит из промежутков $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. Значения $x = 0$ и $x = 1$ не принадлежат области определения. При $x = 0$ и $x = 1$ функция обращается в бесконечность. Докажем это только для $x = 0$, так как для $x = 1$ доказательство аналогичное. Пусть дано любое число $N > 0$. Нужно доказать, что для всех x, достаточно малых по абсолютной величине, будет выполняться неравенство

$$|y| > N$$

или

$$\frac{1}{2|x||x-1|} > N. \qquad (*)$$

Если учесть, что значения $|x|$ малы, так что можно считать $|x| < 1$, то получим $|x-1| = |1+(-x)| < 1 + |x| < 2$, а $\frac{1}{2|x||x-1|} > \frac{1}{2|x|2} = \frac{1}{4|x|}$. Следовательно, если будет справедливо неравенство $\frac{1}{4|x|} > N$, а оно справедливо для $|x| < \frac{1}{4N}$ то тем более при этих x будет справедливо неравенство (*), А это и нужно было доказать.

Прямая с уравнением $x = 0$ есть вертикальная асимптота графика функции. Слева от нее, т. е. когда $x < 0$, график неограниченно поднимается вверх, потому что в этом случае, как видно из выражения функции, $y > 0$. Справа от асимптоты график неограниченно опускается вниз, так как $y < 0$ при $x \to 0$ и $x > 0$.

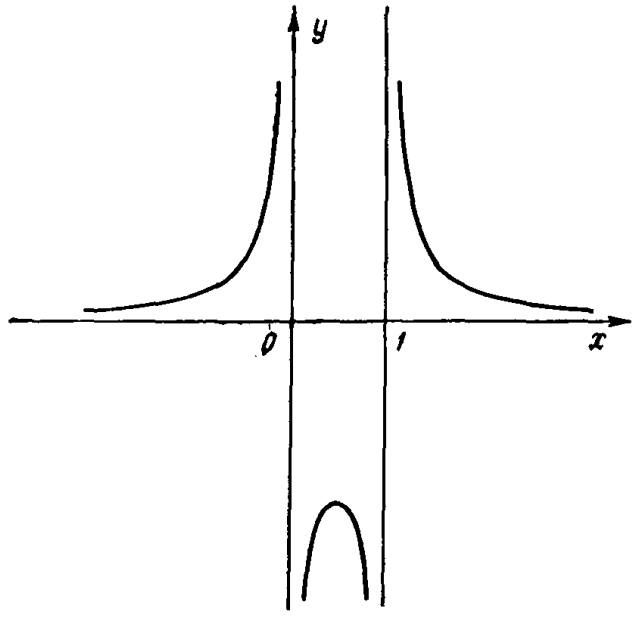

Рис 18

Прямая с уравнением $x = 1$ — тоже вертикальная асимптота графика и поведение его вблизи этой асимптоты исследуется аналогично тому, как это было сделано для $x = 0$. На рис. 18 дан график функции.

б) Запишем функцию так: $y = \lg(x - 1)(2 - x)$. Отсюда видно, что ее область определения есть промежуток (1, 2). Известно, что $\lg z \to -\infty$ при $z \to 0$. Но в данном случае $z = (x - 1)(2 - x)$ и, следовательно, $y \to -\infty$ как при $x \to 1$, так и при $x \to 2$. Это значит, что $x = 1$ и $x = 2$ дают две вертикальные асимптоты графика функции. Обе бесконечные ветви графика неограниченно опускаются вниз. График имеет примерно такой вид, как средняя часть графика на рис. 18.

Пример 236. Найти промежутки возрастания и убывания функции:

$$\text{а) } y = ax^2 + bx + c; \quad \text{б) } y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; \quad \text{в) } y = \frac{1 + \cos x}{2 - \sin x}.$$

Решение. Напомним, что если x_1 и x_2 — любые значения аргумента, взятые из промежутка, принадлежащего области определения функции $f(x)$, $x_1 < x_2$ и $M = f(x_2) - f(x_1)$, то функция $f(x)$ возрастает в этом промежутке, когда $M > 0$, и убывает когда $M < 0$.

а) $M=(ax_2^2+bx_2+c)-(ax_1^2+bx_1+c)=a(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)=a(x_2-x_1)\left(x_2+x_1+\frac{b}{a}\right)=a(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)+\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)\right]$. (*)

Если $x_2+\frac{b}{2a}<0$ и $x_1+\frac{b}{2a}<0$, т. е. если x_1 и x_2 берутся из промежутка $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, то в равенстве (*) выражение, стоящее в квадратных скобках, отрицательно. Так как по условию $x_2-x_1>0$, то при $a>0$ будет $M<0$, а при $a<0$ будем иметь $M>0$. Следовательно, при положительном (отрицательном) a функция убывает (возрастает) в промежутке $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$. Аналогично рассуждая, убедимся, что в промежутке $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ функция возрастает при $a>0$ и убывает при $a<0$.

б) Функция $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ нечетная и периодическая с периодом $\omega=2\pi$. Поэтому исследуем ее на интервале $[0, \pi)$. Положив $\alpha_1=\frac{x_1}{2}$, $\alpha_2=\frac{x_2}{2}$, найдем, что

$$M=\operatorname{tg}\frac{x_2}{2}-\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}=\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{\cos\alpha_2\cos\alpha_1}. \quad (*)$$

Так как $0\leqslant x_1<x_2<\pi$, то $0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2}$ и $0<\alpha_2-\alpha_1<\frac{\pi}{2}-\alpha_1<\frac{\pi}{2}$, т. е. углы α_1, α_2, $\alpha_2-\alpha_1$ острые, и, следовательно, правая часть равенства (*) положительна. Но тогда $M>0$, что означает возрастание $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ в промежутке $[0, \pi)$. Функция $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ возрастает и на всем промежутке $(-\pi, \pi)$, длина которого равна периоду 2π. Действительно, если $-\pi<x<0$, то при возрастании x убывает $-x$, а так как $-x>0$, то по доказанному убывает и $f(-x)$. Но тогда возрастает $-f(-x)$, а в силу нечетности возрастает и $f(x)=-f(-x)$.

а) Так как функция имеет период $\omega=2\pi$, то достаточно ее и исследовать лишь в промежутке $[-\pi, \pi]$.

Известно, что $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, где $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Подставляя эти значения $\sin x$ и $\cos x$ в данную функцию, получаем после несложных преобразований, что $y=\frac{1}{z^2-z+1}$. Заметив, что с возрастанием x от $-\pi$ до π возрастает и $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (см пример 236, б), рассмотрим знаменатель этой дроби $z^2-z+1=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. Когда z возрастает, оставаясь в проме-

жутке $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, то возрастает и $z-\frac{1}{2}$. Но так как $z-\frac{1}{2}<0$, то $\left|z-\frac{1}{2}\right|$ убывает, а следовательно, убывает $\left(z-\frac{1}{2}\right)^2$ и весь знаменатель z^2-z+1. Для промежутка $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ с возрастанием z возрастает не только $z-\frac{1}{2}\geqslant 0$, но также $\left(z-\frac{1}{2}\right)^2$ и z^2-z+1. При $z=\frac{1}{2}$ выражение z^2-z+1 принимает наи-

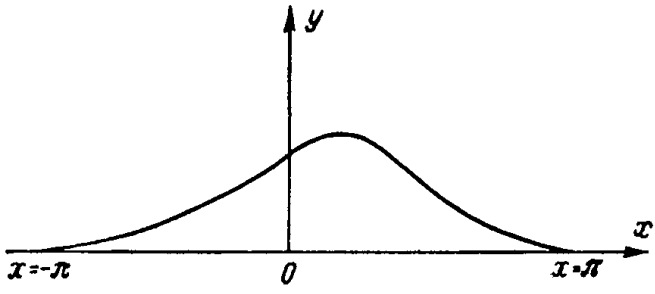

Рис 19

меньшее значение, равное $\frac{3}{4}$. Данная функция, как величина, обратная трехчлену z^2-z+1, наоборот, в промежутке $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ возрастает и, достигнув наибольшего значения $y=\frac{4}{3}$ в точке $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(x\approx 0{,}46)$, убывает в промежутке $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Если еще учесть, что при $x=-\pi$ и $x=\pi$ функция $y=0$, то график функции в промежутке $(-\pi, \pi)$ будет выглядеть так, как это изображено на рис. 19.

Пример 237. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

$$\text{а) } y=\frac{2\cos^2 x+\sin 2x}{2\sin^2 x};\quad \text{б) } y=\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Решение. а) Запишем функцию так. $y=\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x$. Отсюда видно, что функция определена при всех вещественных x, кроме $x=k\pi$. Но она периодическая с периодом π, а потому достаточно исследовать ее в промежутке $(0, \pi)$. Так как $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x=\left(\operatorname{ctg} x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqslant -\frac{1}{4}$, то функция имеет минимум $y=-\frac{1}{4}$ и достигается он там, где $\operatorname{ctg} x=-\frac{1}{2}$, т. е. при $x\approx 2$. Во всех прочих точках промежутка $(0, \pi)$ значения функции больше $-\frac{1}{4}$, потому что $\operatorname{ctg} x$ — убывающая функция и вто-

рой раз не обратится в $-\frac{1}{2}$ в этом промежутке. Следовательно, $y=-\frac{1}{4}$ не только минимум, но и наименьшее значение функции в рассматриваемом промежутке. Что касается наибольшего значения функции, то его нет, потому что $y\to+\infty$ при $x\to 0$ (и при $x\to\pi$), как это видно из равенства $y=\left(\operatorname{ctg}x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, если учесть, что в этом случае $\operatorname{ctg}x\to\infty$. График дан на рис. 20.

б) Так как $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\neq 0$, то область определения функции — промежуток $(-\infty, +\infty)$. В равенстве, связывающем функцию и аргумент, освободимся от знаменателя. Тогда получим:

$$yx^2+(y-1)x+(y-1)=0. \quad (*)$$

Рассматривая полученное равенство как квадратное относительно x и имея в виду, что дискриминант уравнения должен быть неотрицательным, найдем: $(y-1)^2-4y(y-1)\geqslant 0$, $(y-1)(3y+1)\leqslant 0$, $\left(y+\frac{1}{3}\right)(y-1)\leqslant 0$. Последнее же возможно только при $-\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1$. Отсюда заключаем, что $y=-\frac{1}{3}$ есть наименьшее значение функции, а $y=1$ — наибольшее. Подставляя эти значения y в равенство (*), легко найдем соответствующие им значения аргумента $x=-2$ и $x=0$.

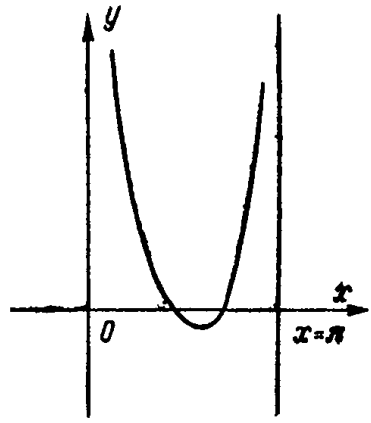

Рис. 20

На этом можно считать решение задачи оконченным. Однако, чтобы изобразить график функции, следует посмотреть на поведение функции при $x\to\pm\infty$. Предварительно заметим, что так как при больших значениях $|x|$ сумма $1+\frac{1}{x}>0$, кроме того, $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>1+\frac{1}{x}$, то при таких x получим $|y|=\frac{1}{|x|}\times$ $\times\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}<\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{|x|}$. Следовательно, $y\to 0$ при $x\to\pm\infty$. Если еще учесть, что $y>0$ при $x>0$ и $y<0$ при $x<0$ и достаточно больших по модулю, то этих данных достаточно, чтобы довольно точно изобразить график фуикции (рис. 21). Ось абсцисс пересекается с графиком в точке $(-1, 0)$.

Пример 238. Найти промежутки выпуклости и вогнутости функции:

$$\text{а) } a^x;\ \text{б) } \log_a x;\ \text{в) } \sin x;\ \text{г) } \operatorname{tg} x.$$

Решение. а) Пусть x_1 и x_2 — любые значения аргумента из области определения функции, не равные между собой. В этом

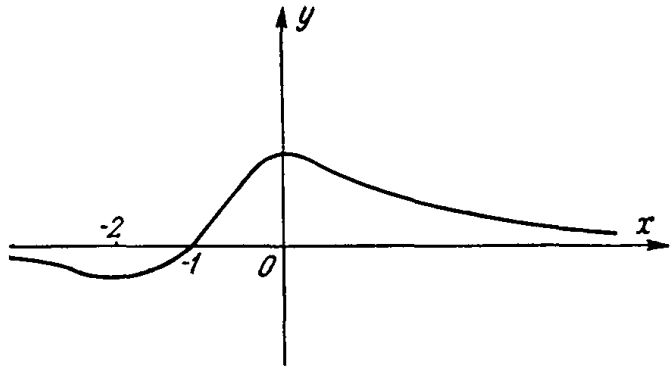

Рис 21

случае $a^{x_1} \neq a^{x_2}$. Пользуясь тем, что среднее арифметическое различных положительных чисел больше среднего геометрического этих чисел, получим $a^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \sqrt{a^{x_1}a^{x_2}} < \frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}$ или $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Следовательно, функция a^x вогнута во всей области определения

б) Пользуясь опять соотношением среднего арифметического и среднего геометрического, найдем для любых различных значений $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, что $\frac{x_1+x_2}{2} > \sqrt{x_1x_2}$. Из этого неравенства следуют неравенство $\log_a \frac{x_1+x_2}{2} > \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2}$, если $a > 1$, и неравенство $\log_a \frac{x_1+x_2}{2} < \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2}$, если $0 < a < 1$. Но это означает, что функция $\log_a x$ выпукла при $a > 1$ и вогнута при $0 < a < 1$ во всей области определения.

в) Функция определена для всех вещественных x. Но она нечетная и периодическая с периодам 2π. Поэтому достаточно исследовать ее в промежутке $[0, \pi]$. Для любых различных значений x_1 и x_2 этого промежутка имеем. $\frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} = \frac{1}{2} 2 \sin \frac{x_1+x_2}{2} \cos \frac{x_1-x_2}{2} < \sin \frac{x_1+x_2}{2}$, так как $0 \leqslant \cos \frac{x_1-x_2}{2} < 1$ и $\sin \frac{x_1+x_2}{2} > 0$. Но это значит, что в промежутке $[0, \pi]$ имеет место выпуклость. Очевидно, в промежутке $[-\pi, 0]$ функция вогнута.

г) Область определения $\operatorname{tg} x$ есть множество промежутков вида $\left(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Но так как $\operatorname{tg} x$ — функция нечетная и имеющая период π, то достаточно изучить ее в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Для любых различных x_1 и x_2, взятых из этого промежутка, имеем:

$$\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2) = \frac{\sin(x_1 + x_2)}{2\cos x_1 \cos x_2} = \frac{2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}}{2\cos x_1 \cos x_2} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{x_1+x_2}{2} \cdot \frac{2\cos^2\frac{x_1+x_2}{2}}{2\cos x_1 \cos x_2} = \operatorname{tg}\frac{x_1+x_2}{2} \times$$

$$\times \frac{1+\cos(x_1+x_2)}{\cos(x_1-x_2)+\cos(x_1+x_2)} = \operatorname{tg}\frac{x_1+x_2}{2} A. \qquad (*)$$

Но $1 + \cos(x_1 + x_2) > \cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2) > 0$, т. е. числитель дроби A больше знаменателя, и, следовательно, $A > 1$. Но тогда из соотношения (*) получаем $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2) > \operatorname{tg}\frac{x_1+x_2}{2}$. Последнее и означает, что в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ имеет место вогнутость. Очевидно, в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ функция выпукла.

В качестве примеров исследования функций и построения их графиков по приведенной в п. 73 схеме подробно рассмотрим некоторые из основных элементарных функций. Это тем более уместно, что ранее мы пользовались некоторыми свойствами этих функций, считая их известными. Однако следует иметь в виду, что для построения графиков есть и иные пути, иногда ведущие к цели быстрее, чем использование изложенной выше схемы. В следующем параграфе эти пути будут указаны и, используя их, мы построим и изучим графики остальных основных элементарных функций, не рассмотренных здесь.

Пример 239. Исследовать функцию $y = a^x$ $(a > 1)$ и построить ее график.

Решение. Функция, заданная формулой $y = a^x$, где a — положительное число, не равное единице, называется показательной.

I. Выражение a^x при $a > 0$ определено для всех вещественных x, так что областью определения функции является промежуток $(-\infty, +\infty)$. Напомним, что это определение вещественной степени положительного числа дается расчлененно: для натурального числа $x = n$, как произведение n сомножителей, равных a (п. 31, 5); для положительного рационального $x = \frac{p}{q}$ $(q > 1)$, как арифметический корень $\sqrt[q]{a^p}$ (п. 46); для поло-

жительиого иррациоиальиого $x\,(a>1)$ с помощью неравенств $a^{x_1}<a^x<a^{x_2}$, где x_1 и x_2 — рациональные приближения x по недостатку и по избытку (п. 47); для $x<0$ формулой $a^x=\frac{1}{a^{-x}}$. Во всех перечисленных случаях операции однозначно выполнимы и $a^x>0$. Это значит, что показательная фуикция однозначна и ее область изменения — промежуток $(0, +\infty)$.

II. Так как $a^{-x}\neq\pm a^x$, то функция не является ни четиой, ни нечетной.

III. Показательиая функция непериодическая. Действительно, если бы у нее существовал период $\omega\neq 0$, то было бы справедливо равенство $a^{x\pm\omega}=a^x$. Но это невозможно ввиду возрастания функции при $a>1$ (см. п. IV).

IV Возьмем любые два числа x_1 и x_2, считая $x_1<x_2$. Получим

$$a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1)=a^{x_1}(a^{\alpha}-1). \qquad (*)$$

Здесь $a^{x_1}>0$ (см. п. I) Покажем, что и $a^{\alpha}-1>0$, т. е. $a^{\alpha}>1$, причем $\alpha=x_2-x_1>0$ и $a>1$. В самом деле, положительиое число α может быть или натуральным n, или дробным рациональиым $\frac{p}{q}\,(q>1)$, или иррациональным. В первом случае неравенство $a^n>1$ следует из умножения n неравенств вида $a>1$. При $x=\frac{p}{q}$ и натуральных p и q имеем $a^p>1$ по доказанному, а $\sqrt[q]{a^p}>1$ по свойству арифметических корией. Если же α — иррациональное число, то, взяв какое-нибудь рациональное приближение его $\alpha_1>0$ по недостатку, будем иметь. $a^{\alpha}>a^{\alpha_1}>1$. Теперь видим, что правая часть неравенства (*) положительна, следовательно, $a^{x_2}>a^{x_1}$ и функция a^x возрастающая.

V. Функция не имеет ни максимумов, ни минимумов, так как она возрастающая во всей области определения.

VI. Фуикция всюду вогнутая (см. пример 238, а).

VII. Так как $a^x>0$ (см. п. I), то $a^x\neq 0$. Это озиачает отсутствие корней у показательной функции и, следовательно, точек пересечения ее графика с осью абсцисс. С осью ординат график пересекается в точке (0, 1), потому что $y=a^0=1$.

VIII. Докажем, что если $x\to+\infty$, то и $a^x\to+\infty$. Это нужно понимать так, что, каково бы ни было число $N>0$, для всех достаточно больших значений x выполняется неравенство $a^x>N$. В справедливости последнего неравенства достаточно убедиться для натурального показателя n, потому что из неравенства $a^n>N$ следует неравенство $a^x>N$ для всех $x>n$ в силу возрастания функции Итак, пусть $x=n$. Так как $a>1$, то, положив $a=1+\beta$, где $\beta=a-1>0$, получим $a^n=(1+\beta)^n>n\beta$. Отсюда видим, что как только будет справедливо

неравенство $n\beta > N$, а это будет иметь место при $n > \frac{N}{\beta}$, так будет справедливо и неравенство $a^n > N$.

Докажем теперь, что, $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$. Это значит, что, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, для всех отрицательных, но достаточно больших по абсолютной величине x выполняется неравенство $a^x < \varepsilon$.

Итак, пусть $x < 0$. Положим $x = -z$, где $z > 0$. Тогда получим $a^x = a^{-z} = \frac{1}{a^z}$. Но по только что доказанному для всех достаточно больших $z = |x|$ выполняется неравенство $a^z > N$. Отсюда, положив $N = \frac{1}{\varepsilon}$, найдем $a^x = \frac{1}{a^z} < \frac{1}{N} = \varepsilon$.

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы о графике функции: график расположен в верхней полуплоскости над всей осью абсцисс, причем любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает его и притом в одной точке (п. I); из двух его точек та расположена выше, которая лежит правее (п. IV); график всюду обращен вогнутостью вверх (п. VI); на нем есть точки, лежащие выше любой прямой, параллельной оси абсцисс (п. VIII); ось абсцисс служит асимптотой графика (п. VIII); график пересекает ось ординат в точке (0, 1) при любом положительном a (п. VII).

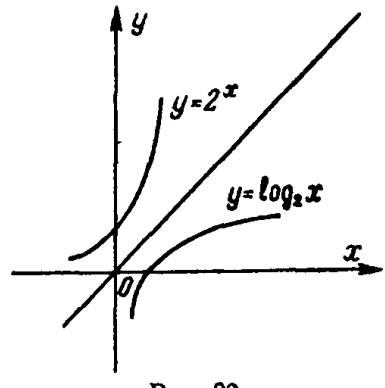

Рис 22

Для построения графика положим $a = 2$ и дополнительно возьмем точки, соответствующие абсциссам $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Теперь составим таблицу:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y	0	0,25	0,5	1	2	4	$+\infty$

График функции дан на рис. 22.

Пример 240. Исследовать функцию $y = \log_a x (a > 1)$ и построить ее график.

Решение. Функция, заданная формулой $y = \log_a x$, где a — положительное число, не равное единице, называется логарифмической.

I. По определению логарифма равенство $y = \log_a x$ равносильно равенству $a^y = x$. Это означает, что логарифмическая и показательная функции — взаимно обратные. Так как $a^y > 0$

при любом вещественном y, то x может быть только положительным. С другой стороны, если взять любое значение $x = x_1$, то уравнение $a^y = x_1$ имеет решение и притом единственное. Это можно высказать и так *всякое положительное число имеет логарифм и притом единственный*. Конечно, при этом подразумевается, что основание логарифма положительно и не равно единице. Доказательство существования логарифма довольно сложное и мы его рассматривать не будем. Единственность же логарифма вытекает из монотонности показательной функции. На самом деле, если бы для данного x_1 нашлись два значения логарифма y_1 и y_2, то было бы справедливо равенство $a^{y_1} = a^{y_2}$. С другой стороны, в силу возрастания показательной функции ($a > 1$), считая $y_1 < y_2$, получим неравенство $a^{y_1} < a^{y_2}$. Это противоречие обязывает нас отвергнуть первоначальное предположение о существовании у x_1 более одного логарифма.

Из всего сказанного делаем заключение, что логарифмическая функция имеет областью определения промежуток $(0, +\infty)$, однозначна в этом промежутке и область ее изменения — множество всех вещественных чисел.

II. Так как функция определена только для $x > 0$, то ставить вопрос о ее четности или нечетности не имеет смысла.

III. Функция $\log_a x$ непериодическая. Действительно, из равенства $\log_a(x + \omega) = \log_a x$ следует: $x + \omega = a^{\log_a(x+\omega)} = a^{\log_a x} = x$, т. е. $\omega = 0$.

IV. Докажем, что функция возрастает во всей области определения. Пусть $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$ и $x_1 < x_2$. Тогда получим: $x_1 = a^{y_1}$, $x_2 = a^{y_2}$ и

$$a^{y_1} < a^{y_2}. \qquad (*)$$

Возможны только три случая. $y_1 > y_2$, $y_1 = y_2$, $y_1 < y_2$. В первом случае в силу возрастания a^y при $a > 1$ получим $a^{y_1} > a^{y_2}$, а во втором $a^{y_1} = a^{y_2}$ (a^y однозначна). Оба эти соотношения противоречат неравенству (*) и потому может быть только $y_1 < y_2$ или $\log_a x_1 < \log_a x_2$, а это и означает возрастание $\log_a x$.

V. Ни максимумов, ни минимумов функция не имеет, так как она всюду возрастающая.

VI. Во всей области определения имеет место выпуклость (см. пример 238, б).

VII. Если $y = 0$, то $x = a^y = a^0 = 1$. Корень $x = 1$ единственный, потому что (в силу возрастания функции $y = \log_a x$) $y > 0$ при $x > 1$ и $y < 0$ при $x < 1$.

VIII. Докажем, что если $x \to +\infty$, то и $\log_a x \to +\infty$. Пусть задано любое $N > 0$. Требуется доказать, что для всех достаточно больших x будет выполняться неравенство $\log_a x > N$. Действительно, если взять $x > a^N$, что возможно, то в силу возрастания $\log_a x$ при $a > 1$ получим $\log_a x > \log_a a^N > N$.

Докажем теперь, что если $x \to 0$, то $\log_a x \to -\infty$. Это нужно понимать так: каково бы ни было число $N > 0$, для всех достаточно малых положительных x будет справедливо неравенство $\log_a x < -N$. На самом деле, если взять $x < a^{-N}$, а его можно взять таким, то получим $\log_a x < -N$. График функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, поскольку эти функции взаимно обратные (рис. 22).

Пример 241. Исследовать функцию $y = \sin x$ и построить ее график.

Решение. I. Синусом угла x называется отношение ординаты b конца подвижного радиуса, образующего угол x с осью абсцисс, к длине r этого радиуса, т. е. $\sin x = \frac{b}{r}$. Синусом числа x называется синус угла в x радианов. Так как $r \neq 0$, то отношение $\frac{b}{r}$ всегда имеет смысл. Оно, как доказывается в тригонометрии, зависит только от угла и определяется им однозначно. Таким образом, $y = \sin x$ есть однозначная функция аргумента x с областью определения $(-\infty, +\infty)$. Область же изменения функции есть промежуток $[-1, 1]$. Действительно, если обозначить буквой a абсциссу конца подвижного радиуса, то найдем. $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant |b|$, $|\sin x| = \frac{|b|}{r} \leqslant 1$ или $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

II. $\sin x$ функция нечетная. Действительно, возьмем для углов x и $-x$ подвижные радиусы одинаковой длины. Учитывая, что ординаты их концов — противоположные числа, получаем $\sin(-x) = \frac{-b}{r} = -\sin x$

III. Если подвижной радиус угла x повернуть на полный угол против часовой стрелки или по часовой стрелке, то в первом случае получим угол $x + 2\pi$, а во втором $x - 2\pi$. Подвижной радиус при этом придет в прежнее положение, так что будем иметь $\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi)$. Следовательно, $\sin x$ имеет период 2π. Учитывая периодичность и нечетность функции, дальнейшее исследование будем вести в промежутке $[0, \pi]$.

IV. Рассмотрим разность

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2}. \qquad (*)$$

Если x_1 и x_2 — углы первого квадранта, причем $x_1 < x_2$, то $\frac{x_2 - x_1}{2}$ и $\frac{x_2 + x_1}{2}$ — тоже углы первого квадранта. В этом случае правая часть равенства (*) положительна, $\sin x_1 < \sin x_2$, так что $\sin x$ в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает. Если же $\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$,

то $\frac{x_2+x_1}{2}$ — угол второго квадранта и $\cos\frac{x_2+x_1}{2}<0$, в то время как $\frac{x_2-x_1}{2}$ — угол первого квадранта, где синус положительный. Но тогда правая часть равенства (*) отрицательна, $\sin x_1>\sin x_2$, что означает убывание $\sin x$ в промежутке $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$.

V. При $x=\frac{\pi}{2}$ происходит смена возрастания функции на убывание. Здесь функция имеет максимум: $y_{\max}=\sin\frac{\pi}{2}=\frac{r}{r}=1$

VI. Во всем промежутке $[0,\ \pi]$ функция выпукла (см. пример 238, в).

VII и VIII. Корни функции найдутся из уравнения $\sin x=0$. Так как $\sin x=\frac{b}{r}$, то должно быть $b=0$. Для рассматриваемого промежутка это возможно только при $x_1=0$ и $x_2=\pi$. Одновременно нами получены и значения функции на границах: $y_{1,2}=\sin 0=\sin\pi=0$. Сравнивая найденное выше значение максимума функции со значениями на границах, видим, что максимум является наибольшим значением функции в промежутке $[0,\ \pi]$.

Чтобы построить график, найдем еще координаты нескольких точек графика, соответствующие таким абсциссам: $x=\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$. Получим таблицу:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	0,5	~ 0,8	1	~ 0,8	0,5	0

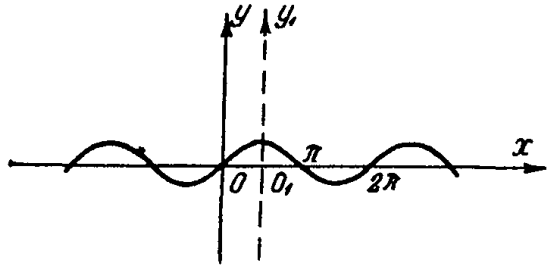

Рис 23

На основе таблицы и результатов исследования построим сперва график синуса на промежутке $[0,\ \pi]$. Затем, пользуясь нечетностью и периодичностью функции, выведем график за пределы этого промежутка (рис. 23).

Пример 242. Построить график функции:

$$\text{а) } y = \operatorname{Arcsin} x; \quad \text{б) } y = \arcsin x.$$

Решение. а) Функция $y = \operatorname{Arcsin} x$ является обратной для $y = \sin x$, и поэтому равенства $y = \operatorname{Arcsin} x$ и $x = \sin y$ равносильны (см. п. 50). Следовательно, все свойства этой функции легко получить из свойств синуса (см. пример 241). Поэтому мы не будем их подробно рассматривать и укажем лишь, что область определения функции есть промежуток $[-1, 1]$, область изменения — промежуток $(-\infty, +\infty)$ и что эта функция (бесконечно) многозначная. Ее график, согласно свойству графика обратной функции, симметричен графику функции $y = \sin x$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 24).

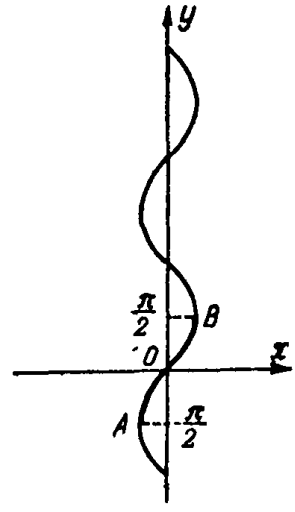

Рис 24

б) Функция $y = \arcsin x$ есть главная ветвь $\operatorname{Arcsin} x$ (п. 50), т. е. множество всех тех значений $\operatorname{Arcsin} x$, которые содержатся в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Это однозначная функция, и ее график есть часть графика функции $y = \operatorname{Arcsin} x$, заключенная между параллельными прямыми $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ (линия AB на рис. 24).

Пример 243. Исследовать функцию $y = \operatorname{tg} x$ и построить ее график.

Решение. I. Тангенсом угла x называется отношение ординаты b конца подвижного радиуса, образующего угол x с осью абсцисс, к его абсциссе a, т. е $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$. Тангенсом числа x называется тангенс угла в x радианов. Это отношение зависит только от x, имеет вполне определенное единственное значение для определенного x, за исключением тех случаев, когда $a = 0$. Последние имеют место лишь тогда, когда подвижной радиус находится на оси ординат и, следовательно, когда углы будут вида $\frac{2k-1}{2}\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Таким образом, $\operatorname{tg} x$ есть однозначная функция с областью определения, состоящей из бесконечного множества промежутков вида $\left(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Так как $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$, а отно-

шение $\frac{b}{a}$ может принять любое значение, то областью изменения функции является промежуток $(-\infty, +\infty)$.

II. Тангенс есть функция нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$.

III. Так как $\operatorname{tg}(x \pm \pi) = \frac{\sin(x \pm \pi)}{\cos(x \pm \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$, то заключаем, что $\operatorname{tg} x$ имеет период, равный π. Учитывая нечетность и периодичность тангенса, дальнейшее исследование будем вести в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

IV. Тангенс есть функция возрастающая. На самом деле, если $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1} > 0$, так как x_1, x_2 и $x_2 - x_1$ — углы первого квадранта, где синус и косинус положительны.

Тангенс может принять любое значение (см. п. I) и поэтому является функцией неограниченной. С другой стороны, в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс возрастает. Следовательно, $\operatorname{tg} x$ обращается в бесконечность в точке $x = \frac{\pi}{2}$ или иначе: $\operatorname{tg} x \to \infty$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. Как известно, это означает, что график функции имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x = \frac{\pi}{2}$. Во всей области определения асимптот будет бесконечное множество. Их уравнения имеют вид: $x = \frac{2k-1}{2}\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

V. Ввиду возрастания тангенса он не имеет ни максимумов, ни минимумов.

VI. В промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс есть вогнутая функция (см. пример 238, *г*).

VII. В промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ функция имеет только один корень $x = 0$. Действительно, так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то уравнение $\operatorname{tg} x = 0$ равносильно уравнению $\sin x = 0$, а для последнего наличие только одного корня было доказано в примере 241. Заметим еще, что ввиду возрастания $\operatorname{tg} x > 0$ при $x > 0$.

VIII. На левой границе промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, как только что было выяснено, $y = 0$. Поведение функции на правой границе было выяснено в п. IV, а именно $\operatorname{tg} x \to +\infty$ при $x \to \frac{\pi}{2}$.

Чтобы построить график, возьмем дополнительно точки с абсциссами $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$. Составим таблицу:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	$\sim 0{,}6$	1	$\sim 1{,}7$	$+\infty$

Пользуясь результатами исследования, построим график функции в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, а затем на основании нечетности и периодичности функции выведем его за пределы этого промежутка (см. рис. 25).

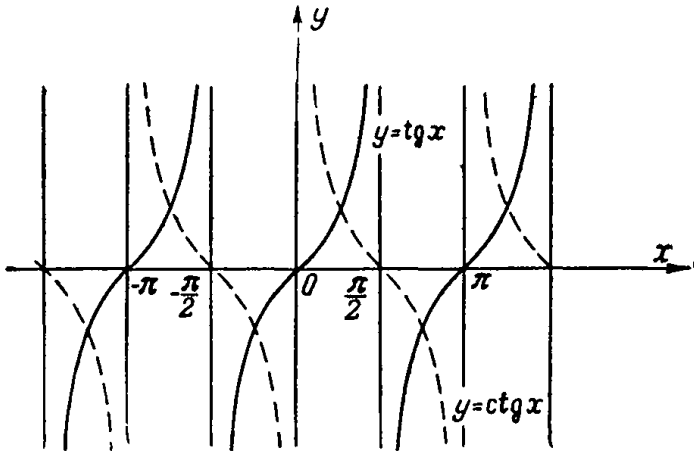

Рис. 25

Пример 244. Построить график функции

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

Решение. Если в равенстве $y = \operatorname{tg} x$ поменять ролями функцию и аргумент и новые функцию и аргумент опять обозначить через y и x, то для них получим $x = \operatorname{tg} y$. Эта новая функция будет обратной для функции $y = \operatorname{tg} x$, называется арктангенсом и обозначается так: $y = \operatorname{Arctg} x$. Записи $y = \operatorname{Arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$ равносильны и поэтому можно сказать, что *арктангенс x есть угол* (или *число*), *тангенс которого x*. Так как x есть тангенс, то допустимыми значениями для x будут все вещественные числа, а следовательно, область определения $\operatorname{Arctg} x$ есть промежуток $(-\infty, +\infty)$. Так как y — угол, то область изменения функции тоже промежуток $(-\infty, +\infty)$. Но $y = \operatorname{Arctg} x$ функция неоднозначная. Действительно, по данному значению тангенса, равному x, найдется бесконечное множество углов y. То

значение y_1 функции, соответствующее значению x_1, которое удовлетворяет неравенствам $-\frac{\pi}{2} < y_1 < \frac{\pi}{2}$, называется **главным значением** функции $\operatorname{Arctg} x$, а множество всех этих главных значений, соответствующих всевозможным значениям x, взятым из промежутка $(-\infty, +\infty)$, называется **главной ветвью** $\operatorname{Arctg} x$ и обозначается $\operatorname{arctg} x$. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ однозначная, ее область определения — промежуток $(-\infty, +\infty)$, а область изменения — $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

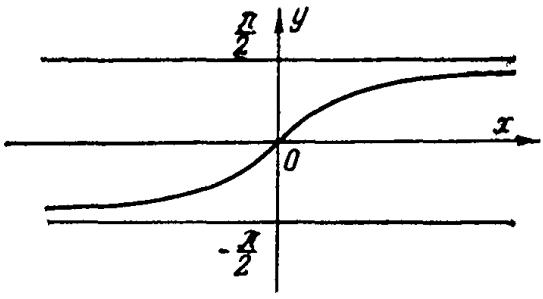

Рис 26

График функции $y = \operatorname{arctg} x$, как функции, обратной для функции $y = \operatorname{tg} x$, получится зеркальным отражением в биссектрисе первого и третьего координатных углов той части графика тангенса, которая соответствует промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Он заключен между двумя горизонтальными асимптотами, уравнения которых $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ (рис. 26).

§ 2. Преобразование графиков

74. Иногда, зная график какой-нибудь функции, можно путем некоторого геометрического преобразования получить график другой функции. Рассмотрим следующие преобразования: 1) *осевая симметрия* относительно *оси абсцисс*; 2) *осевая симметрия* относительно *оси ординат*; 3) *центральная симметрия* относительно начала координат; 4) *параллельный перенос* на данный отрезок в направлении оси абсцисс; 5) *параллельный перенос* на данный отрезок в направлении оси ординат; 6) *растяжение (сжатие)* в данном отношении по направлению оси абсцисс; 7) *растяжение (сжатие)* в данном отношении по направлению оси ординат. Свойства этих преобразований состоят в том, что точка (x, y) плоскости переходит: при первом преобразовании в точку $(x, -y)$; при втором — в точку $(-x, y)$; при третьем — в точку $(-x, -y)$; при четвертом — в точку $(x + a, y)$, где $a \gtrless 0$; при пятом — в точку $(x, y + b)$, где $b \gtrless 0$, при шестом — в точку (kx, y), где $k > 0$; при седьмом — в точку (x, ky), где $k > 0$.

Перечисленные свойства преобразований можно принять за определения этих преобразований. Обычно эти преобразования (или часть их) изучаются в школе. Например, осевая симметрия относительно любой прямой и центральная симметрия относи-

тельно любой точки общеизвестны. В этом случае указанные свойства должны быть доказаны исходя из ранее данных определений. Такие доказательства проводятся просто, и мы не будем на них останавливаться.

Пусть известен график l функции $y = f(x)$. Соответственно перечисленным преобразованиям сформулируем теоремы, которые будем называть теоремами I — VII.

I. График l_1 функции $y = -f(x)$ симметричен l относительно оси абсцисс.

II. График l_2 функции $y = f(-x)$ симметричен l относительно оси ординат.

III. График l_3 функции $y = -f(-x)$ симметричен l относительно начала координат.

IV. График l_4 функции $y = f(x-a)$ получается параллельным переносом l на отрезок a в направлении оси абсцисс (вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$).

V. График l_5 функции $y = f(x) + b$ получается параллельным переносом l на отрезок b в направлении оси ординат (вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$).

VI. График l_6 функции $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ получается растяжением (сжатием) l в k раз по направлению оси абсцисс ($k > 1$ — растяжение, $0 < k < 1$ — сжатие).

VII. График l_7 функции $y = kf(x)$ получается растяжением (сжатием) l в k раз по направлению оси ординат ($k > 1$ — растяжение, $0 < k < 1$ — сжатие).

Так как все эти теоремы доказываются аналогично, то ограничимся доказательствами теорем I и IV.

I. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит l и, следовательно, справедливо тождество $y_0 = f(x_0)$. Тогда точка $M_1(x_0, -y_0)$ лежит на l_1, потому что ее координаты удовлетворяют уравнению графика l_1: $-y_0 = -f(x_0)$ или $y_0 = f(x_0)$. Так как точки M и M_1 симметричны относительно оси абсцисс, то, следовательно, *любой* точке M графика l соответствует симметричная ей точка M_1 графика l_1. Никаких иных точек, кроме полученных указанным способом, на l_1 нет. Действительно, если бы такая точка $N_1(x_1, y_1)$ оказалась, так что было бы $y_1 = -f(x_1)$, то на графике l нашлась бы еще точка $N(x_1, -y_1)$, что не может быть, так как, взяв на l *любую* точку M, мы тем самым уже учли *все* точки l.

IV. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит l, и, следовательно, имеет место тождество: $y_0 = f(x_0)$. Тогда точка $M_1(x_0 + a, y_0)$ лежит на l_4, потому что ее координаты удовлетворяют уравнению графика l_4: $y_0 = f[(x_0 + a) - a]$ или $y_0 = f(x_0)$. Значит, *любой* точке M графика l соответствует точка M_1 графика l_4, получаемая параллельным переносом M на отрезок a в направлении оси абсцисс. Никаких иных точек на l_4, кроме полученных применен-

ным сейчас способом, нет. Доказательство этого такое же, как и в теореме I.

Отметим еще две теоремы (VIII и IX), часто используемые при построении графиков

VIII. Графики функций $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$ совпадают для тех x, для которых $f(x) \geqslant 0$. Для прочих x они симметричны относительно оси абсцисс.

Действительно, если $f(x) \geqslant 0$, то $|f(x)| = f(x)$; если же $f(x) < 0$, то $|f(x)| = -f(x)$.

IX. График функции $y = f(|x|)$ симметричен относительно оси ординат и при $x \geqslant 0$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$.

Первая часть теоремы следует из четности функции $f(|x|)$, а вторая из того, что $f(|x|) = f(x)$ при $x \geqslant 0$.

Пример 245. Построить график функции $y = kx + b$.

Решение. Функция, заданная формулой $y = kx + b$, называется *линейной*

Ввиду однозначной выполнимости действий умножения и сложения чисел, линейная функция определена и однозначна для всех вещественных x. График функции $y = kx$ есть прямая, проходящая через начало координат и наклоненная к оси абсцисс под углом $\alpha = \operatorname{arctg} k$ (см. пример 227, б) График функции $y = kx + b$ на основании теоремы V получится параллельным переносом этой прямой в направлении оси ординат на отрезок b (вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$) Таким образом, график функции $y = kx + b$ есть прямая, проходящая через точку $(0, b)$ и наклоненная к оси абсцисс под углом $\alpha = \operatorname{arctg} k$.

Пример 246. Построить график функции:

$$\text{а) } y = \frac{1}{x}; \quad \text{б) } y = \frac{k}{x}, \quad k \neq 0.$$

Решение. а) Функция определена для всех $x \neq 0$. При $x = 0$ функция обращается в бесконечность и, следовательно, график функции имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x = 0$. Исследование функции достаточно провести в промежутке $(0, +\infty)$, потому что она нечетная: $f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$. Для любых положительных значений x_1 и x_2 из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Это значит, что функция в промежутке $(0, +\infty)$ убывает и потому не имеет ни максимумов, ни минимумов. Для любых неравных между собой x_1 и x_2, взятых из промежутка $(0, +\infty)$, имеем: $\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - \frac{2}{x_1 + x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}{2x_1x_2(x_1 + x_2)} =$

$= \frac{(x_1 - x_2)^2}{2x_1x_2(x_1 + x_2)} > 0$. Следовательно, функция вогнута всюду в рассматриваемом промежутке. Очевидно, $y \to +\infty$ при $x \to 0$ и $y \to 0$ при $x \to +\infty$. Последнее означает, что ось абсцисс есть горизонтальная асимптота графика (выше было показано, что ось ординат тоже асимптота). Наконец, отметим, что $y > 0$ при

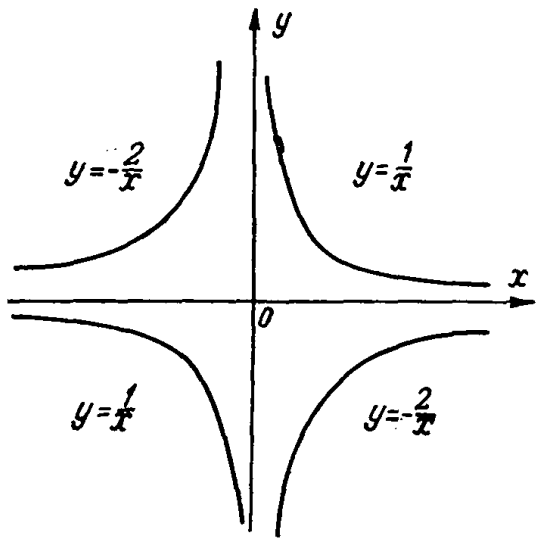

Рис. 27

$x > 0$. Найдем еще несколько точек на графике: $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 2$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$; $x_3 = 2$, $y_3 = \frac{1}{2}$. Пользуясь полученными данными, построим график (см. рис. 27).

б) Пусть $k > 0$. График функции $y = \frac{k}{x}$ получим из графика функции $y = \frac{1}{x}$ растяжением (если $k > 1$) или сжатием (если $k < 1$) его в k раз в направлении оси ординат (теорема VII). Если $k < 0$, то, положив $k = -m$, на основании теоремы I убедимся, что графики функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = \frac{m}{x}$ симметричны относительно оси абсцисс. Линия, являющаяся графиком функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, называется гиперболой. При любом $k \neq 0$ оси координат — асимптоты гиперболы. Точка пересечения асимптот называется центром гиперболы. На рис. 27 дана гипербола для $k = -2$.

Замечание. Известно, что обратно пропорциональные величины x и y связаны соотношением $xy = k$. Таким образом, графиком обратной пропорциональности является гипербола.

Пример 247. Построить график функции:

а) $y = x^2$; б) $y = ax^2\ (a \neq 0)$; в) $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$.

Решение. а) Операция возведения в квадрат однозначно выполнима для любого числа. Поэтому функция $y = x^2$ однозначна с областью определения $(-\infty, +\infty)$. Так как $x^2 \geqslant 0$, то область изменения функции — промежуток $[0, +\infty)$. Исследование достаточно провести в промежутке $[0, +\infty)$, потому что функция четная: $(-x)^2 = x^2$. В этом промежутке рассматриваемая функция возрастающая и вогнутая. Действительно, при $0 \leqslant x_1 < x_2$ имеем: $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$ и $\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 > 0$.

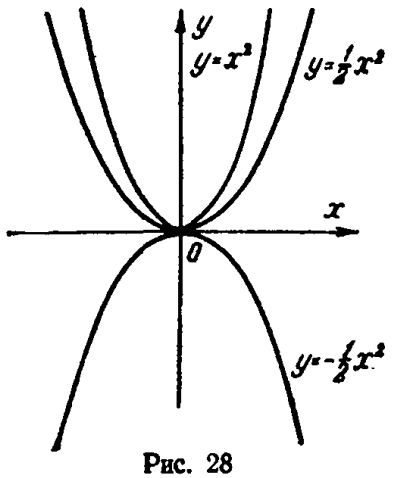

Рис. 28

При $x = 0$, очевидно, и $y = 0$, а при $x \to +\infty$ и $y \to +\infty$. Для уточнения графика возьмем следующие точки, лежащие на нем: $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; $x_2 = 2$, $y_2 = 4$; $x_3 = 3$, $y_3 = 9$. Пользуясь этими точками и результатами исследования, построим график (см. рис. 28).

б) Пусть $a > 0$. График функции $y = ax^2$ получится из графика функции $y = x^2$ растяжением его (если $a > 1$) или сжатием (если $a < 1$) в a раз по направлению оси ординат (теорема VII). Если $a < 0$, то, положив $a = -b$, где $b > 0$, получим уравнение в виде $y = -bx^2$. Следовательно, график функции $y = ax^2$ получится из графика функции $y = bx^2$ зеркальным отражением последнего в оси абсцисс (теорема I). На рис. 28 даны графики этой функции для $a = \frac{1}{2}$ и $a = -\frac{1}{2}$.

в) Функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется **квадратной** (или **квадратичной**).

Эту формулу можно записать так: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Положим $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Тогда найдем $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Из последнего равенства видно, что если выполнить параллельный перенос графика функции $y = ax^2$ в направлении оси абсцисс на отрезок α (вправо, если $\alpha > 0$, и влево, если $\alpha < 0$), а затем параллельный перенос в направлении оси ординат на отрезок β (вверх, если $\beta > 0$, и вниз, если $\beta < 0$), то в результате этих

двух преобразований придем к графику функции $y = ax^2 + bx + c$ (теоремы IV и V). Полученная кривая называется **параболой**, ее ось симметрии — **осью** параболы, а точка пересечения оси с параболой — **вершиной** параболы. Ось этой параболы параллельна оси ординат и проходит через вершину параболы, которая находится в точке (α, β). Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, кривая всюду вогнута, а ее вершина соответствует минимуму функции. При $a < 0$ ветви направлены вниз, кривая всюду выпукла, а вершина соответствует максимуму функции.

На рис. 29 изображена парабола, соответствующая уравнению $y = x^2 - 4x + 3$.

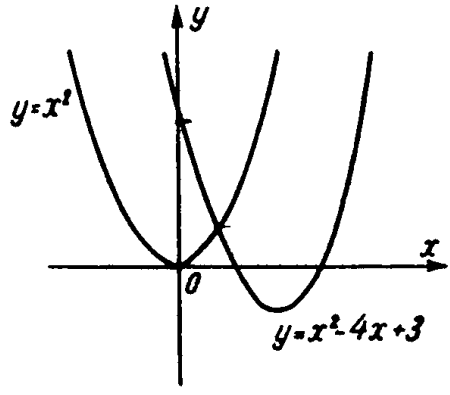

Рис. 29

Пример 248. Построить график функции:

а) $y = \cos x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

Решение. а) Так как $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то график функции $y = \cos x$ получится из графика функции $y = \sin x$ параллельным переносом последнего в направлении оси абсцисс на отрезок $-\frac{\pi}{2}$, т. е. влево (теорема IV). Можно перенести не график влево, а ось ординат вправо на отрезок $\frac{\pi}{2}$. На рис. 23 именно так и сделано. График $\sin x$ в системе осей xOy служит одновременно и графиком $\cos x$ в системе xO_1y_1.

б) Так как $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, то график $\operatorname{ctg} x$ получится из графика $\operatorname{tg} x$ параллельным переносом последнего на отрезок $\frac{\pi}{2}$ (вправо) в направлении оси абсцисс с последующим зеркальным отражением в оси абсцисс (теоремы IV и I). На рис. 25 график $\operatorname{ctg} x$ изображен пунктиром.

Пример 249. Построить график функции:

а) $y = a^x$, $0 < a < 1$; б) $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

Решение. а) Положим $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$. Тогда получим $y = a^x = b^{-x}$.

Так как графики функций $y = b^{-x}$ и $y = b^x$ симметричны относительно оси ординат (теорема II), то, построив график функции $y = b^x$ (см. пример 239) и отразив его зеркально в оси ординат, получим график функции $y = a^x$ для $0 < a < 1$. На рис. 30 дан график этой функции, когда $a = \frac{1}{2}$.

б) Функция $y = \log_a x$ обратная функции $y = a^x$. Ее график получится зеркальным отражением графика функции $y = a^x$ в биссектрисе первого и третьего координатных углов (см. рис. 30).

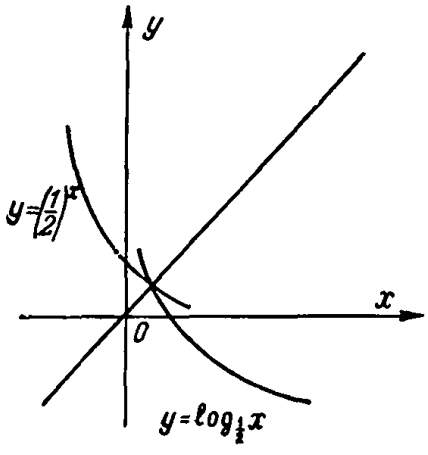

Рис 30

Пример 250. Построить график функции:

$$\text{а) } y = \sin 2x; \quad \text{б) } y = \sin \frac{x}{2}.$$

Решение. а) График функции изображен на рис. 31. Он получается из графика $\sin x$ сжатием его в направлении оси абсцисс в два раза (теорема VI).

б) График функции $y = \sin \frac{x}{2}$ (рис. 31) получается растяжением графика функции $y = \sin x$ в направлении оси абсцисс в два раза (теорема VI).

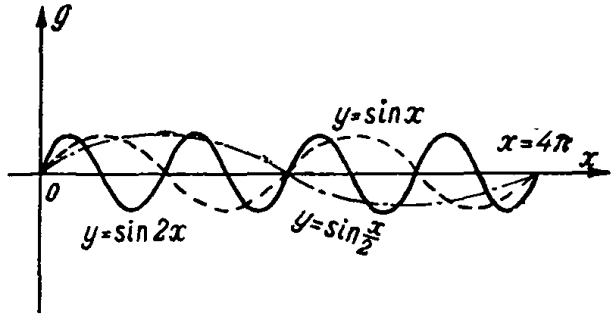

Рис 31

Пример 251. Построить график функции:

$$\text{а) } y = 2\sin 2x; \quad \text{б) } y = 1{,}2\sin 2x - 1{,}6\cos 2x.$$

Решение. а) Если график функции $y = \sin x$ сжать в направлении оси абсцисс в два раза, а затем полученную линию подвергнуть растяжению в направлении оси ординат в два раза, то получим график функции $y = 2\sin 2x$ (теоремы VI и VII) (рис. 32).

б) Преобразуем выражение $1{,}2\sin 2x - 1{,}6\cos 2x$, введя вспомогательный угол: $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, $\cos\varphi = \frac{3}{5}$. Получим: $1{,}2\sin 2x - 1{,}6\cos 2x = 2\left(\frac{3}{5}\sin 2x - \frac{4}{5}\cos 2x\right) = 2(\sin 2x\cos\varphi - \cos 2x\sin\varphi) = 2\sin(2x-\varphi) = 2\sin 2\left(x - \frac{\varphi}{2}\right)$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 0{,}92$. Отсюда видно, что если сделать параллельный перенос

графика фуикции $y = 2\sin 2x$ (см. пример 251, а) в направлении оси абсцисс на отрезок $\frac{\varphi}{2} \approx 0{,}5$ (вправо), то получим график функции $y = 1{,}2\sin 2x - 1{,}6\cos 2x$ (теорема IV). Вместо переноса графика вправо можио перенести ось ординат влево на отрезок $\frac{\varphi}{2}$. На рис. 32 именно так и сделано. График $2\sin 2x$ в системе осей xOy служит одновременно и графиком $1{,}2\sin 2x + 1{,}6\cos 2x$, но в системе xO_1y_1.

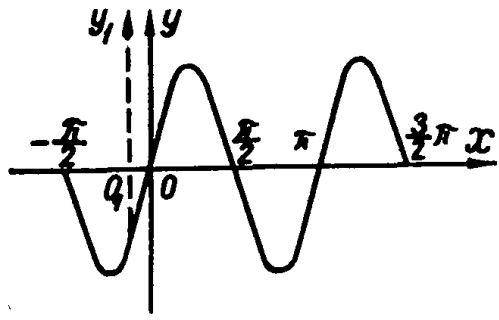

Рис. 32

Пример 252. Построить график функции:

а) $y = |x|(|x| - 2)$, б) $y = |x(x-2)|$; в) $y = 2^{x+|x|}$.

Решение. а) Так как функция четная, то ее графнк симметричен относительно оси ординат. При $x > 0$, когда $|x| = x$, уравнение, задающее функцию, принимает вид: $y = x(x-2)$. Это квадратичная функция и ее график — парабола, пересекающая ось абсцисс в точках (0, 0) и (2, 0), с вершиной в точке (1, —1). График функции дан на рис. 33.

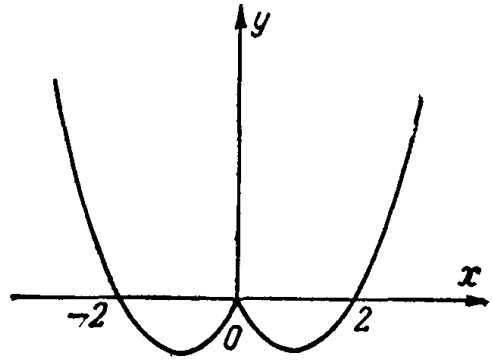

Рис. 33

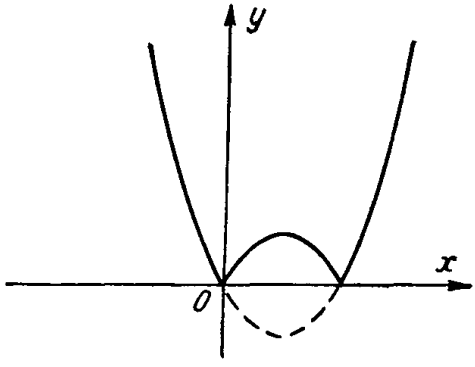

Рис 34

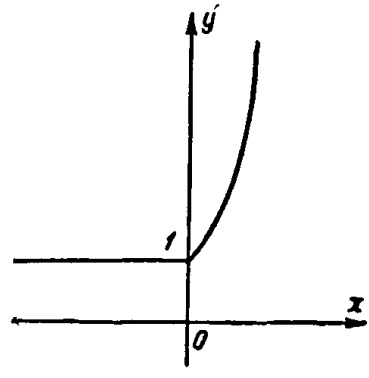

Рис. 35

б) Произведение $x(x-2) \geqslant 0$ прн $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 2$. Для этих x функция может быть записана так: $y = x(x-2)$. Но это квадра-

тичная функция и ее график — парабола с вершиной в точке $(1, -1)$ и пересекающая ось абсцисс в точках $(0, 0)$ и $(2, 0)$. Что касается промежутка $[0, 2]$, то в нем график данной функции и этой параболы симметричны относительно оси абсцисс, так как их ординаты, соответствующие одинаковым абсциссам, равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки. График функции приведен на рис. 34.

в) Если $x < 0$, то $x + |x| = 0$ и $y = 2^0 = 1$. Это значит, что слева от оси ординат график функции есть прямая, проходящая через точку $(0, 1)$ параллельно оси абсцисс (рис. 35). Если $x > 0$, то $x + |x| = 2x$ и $y = 4^x$, так что справа от оси ординат будем иметь график показательной функции $y = 4^x$ (см. пример 239).

Пример 253. Построить график функции

$$y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x.$$

Решение. Данная функция есть сумма двух слагаемых. Первое слагаемое имеет графиком обычную синусоиду. График же $\frac{1}{3}\sin 3x$ получится из графика $\sin x$, если его сжать в три раза по направлению оси абсцисс, а затем сделать то же самое по направлению оси ординат (теоремы VI и VII). Складывая ординаты графиков $\sin x$ и $\frac{1}{3}\sin 3x$ для одинаковых x, найдем ординаты суммы $\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ для этих x и, таким образом, построим график данной функции (рис. 36, сплошная линия).

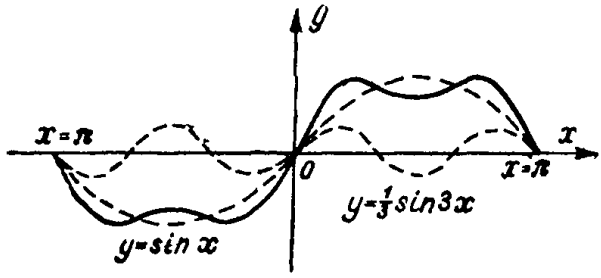

Рис. 36

Пример 254. Построить график функции

$$y = \frac{2x-1}{x^2}.$$

Решение. Область определения функции состоит из промежутков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. В точке $x = 0$ функция $y = \frac{2x-1}{x^2}$ обращается в бесконечность, так что ось ординат — асимптота графика. Если же учесть, что $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \to 0$ при $x \to \pm\infty$, то заключаем, что и ось абсцисс тоже является асимпто-

той графика функции. Выясним теперь промежутки монотонности функции. Пусть x_1 и x_2 — любые значения аргумента, причем $x_1 < x_2$. Будем иметь:

$$\frac{2x_2-1}{x_2^2}-\frac{2x_1-1}{x_1^2}=\frac{2x_2x_1^2-x_1^2-2x_1x_2^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=$$
$$=\frac{(x_2^2-x_1^2)-2x_1x_2(x_2-x_1)}{x_1^2x_2^2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\cdot\frac{x_2+x_1-2x_1x_2}{x_1x_2}=$$
$$=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-2\right). \qquad (*)$$

При x_1 и x_2 одного знака первый множитель правой части равенства (*) всегда положителен. Второй же множитель будет положителен только тогда, когда x_1 и x_2 берутся из промежутка $(0, 1]$, для всех же иных x_1 и x_2 (но одного знака) он отрицателен. Это означает, что лишь в промежутке $(0, 1]$ функция возрастает, в промежутках же $(-\infty, 0)$ и $[1, +\infty)$ она убывает. При $x = 1$ происходит смена возрастания функции на убывание. Здесь функция достигает максимума, значение которого $y = 1$. При $x < \frac{1}{2}$ (но $x \neq 0$)

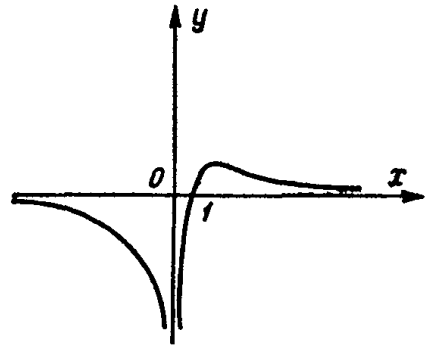

Рис. 37

значение $y = \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x^2} < 0$, так что в промежутках $(-\infty, 0)$ и $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ график находится под осью абсцисс. В промежутке же $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ график расположен выше оси абсцисс, потому что $y = \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x^2} > 0$, когда $x > \frac{1}{2}$. Значение $x = \frac{1}{2}$ есть корень функции, и потому график пересекает ось абсцисс в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ (рис. 37).

Пример 255. Построить график функции

$$y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Решение. Так как $\arccos\alpha$ имеет смысл лишь при $|\alpha| \leqslant 1$, то область определения функции есть множество всех решений неравенства $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leqslant 1$. Очевидно, это есть промежуток

$(-\infty, +\infty)$. В силу четности функции достаточно изучить ее для $x \geqslant 0$, причем график ее будет симметричен относительно оси ординат. Пользуясь определением арккосинуса, получаем из данного равенства, что $\cos y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Отсюда находим $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}} = \sqrt{x^2} = x$, причем перед корнем взят знак плюс, потому что $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $0 \leqslant \frac{y}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\operatorname{tg}\frac{y}{2} \geqslant 0$. Из равенства $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = x$ получаем $\frac{y}{2} = \operatorname{arctg} x$ или $y = 2\operatorname{arctg} x$.

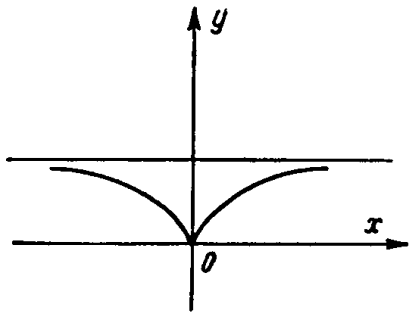

Рис 38

Теперь ясно, что для получения графика данной функции в промежутке $[0, +\infty)$ нужно удвоить ординаты графика функции $y = \operatorname{arctg} x$, т. е., иначе, произвести растяжение его в направлении оси ординат в два раза. Левая же часть графика симметрична правой относительно оси ординат (рис. 38).

75. В заключение остановимся на графическом способе решения уравнений. Вещественные корни уравнения $f(x) = 0$ можно толковать геометрически как абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс. Число таких точек даст число корней уравнения $f(x) = 0$. Вещественные корни уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ можно толковать геометрически как абсциссы точек пересечения графиков функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Таким образом, число последних даст число вещественных корней уравнения $f_1(x) = f_2(x)$. Если начерчен график функции $y = f(x)$, то, измерив в выбранном для построения функции масштабе отрезки, соответствующие абсциссам точек пересечения этого графика с осью абсцисс, можно приближенно определить корни уравнения Графически можно решать и систему двух уравнений с двумя неизвестными

Степень точности графического решения существенно зависит от масштаба построения графика. Если вблизи интересующих нас точек графиков выполнить построения в достаточно большом масштабе, то можно получить корни с высокой степенью точности.

Пример 256. Найти приближенные значения вещественных корней уравнения

$$x^3 + 3x + 2 = 0.$$

Решение. Умножив данное уравнение на $\frac{1}{10}$, придем к уравнению $\frac{1}{10}(x^3 + 3x + 2) = 0$, равносильному данному. Построим

график $y = \frac{1}{10}(x^3 + 3x + 2)$ (рис. 39). Как видно, он имеет только одну точку пересечения с осью абсцисс. Это значит, что рассматриваемое уравнение имеет только один вещественный корень. Измерив расстояние этой точки до начала координат, найдем приближенное значение корня, равное $-0{,}6$.

Заметим, что если бы уравнение не было умножено на $\frac{1}{10}$, то пришлось бы строить график функции $y = x^3 + 3x + 2$, а это менее удобно, так как ординаты последнего большие даже для малых абсцисс.

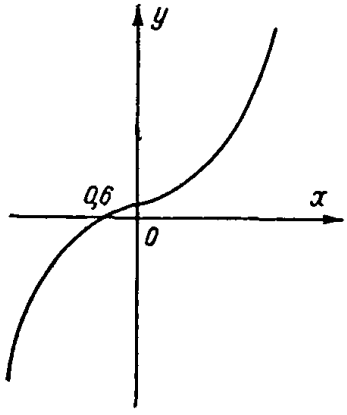

Рис 39

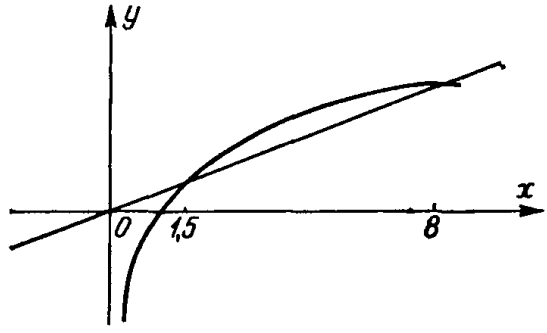

Рис. 40

Пример 257. Найти приближенные значения вещественных корней уравнения

$$8 \log_2 x = 3x.$$

Решение. Построив графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \frac{3}{8}x$ (рис. 40) и измерив абсциссы точек пересечения этих графиков, найдем приближенные значения искомых корней. Их два: $x_1 \approx 1{,}5$; $x_2 = 8$.

Упражнения

Найти область определения функции (277—281):

277. а) $y = \sqrt[4]{x^2 - 1}$, б) $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-4)}}$; в) $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$.

278. а) $y = \sqrt{2 - 2^{\frac{1}{x}}}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{3^x + 1}}$; в) $y = (x-1)^x$.

279. а) $y = \lg \frac{x-1}{x+1}$; б) $y = \lg(x-1) - \lg(x+1)$;

в) $y = \lg|x-1| - \lg|x+1|$.

280. а) $y = \arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; б) $y = \arccos\sqrt{-x}$.

281. а) $y = \sqrt{\operatorname{tg} 2x}$; б) $y = \lg \sin x$; в) $y = \dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{x}}$.

Найти промежутки монотонности функции (282—285):

282. $y = x^3 + 7x + 5$.

283. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

284. $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

285. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ в промежутке $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

286. Выяснить, будет ли функция четной или нечетной:

а) $\sqrt{x^3}$; б) $(x^2+1)\sin x$; в) $\operatorname{tg}^2 x - 3\cos 2x$;

г) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x$.

287. Найти период функции: а) $y = \cos 4x$; б) $y = \sin\dfrac{x}{3}$; в) $y = 2\sin\dfrac{x}{4} + \cos\dfrac{x}{5}$; г) $y = \sin^2 3x$; д) $y = \sin\sqrt{2}x$.

Построить графики функций (288—292):

288. $y = \dfrac{x^4 - 6x^2 + 10}{2}$.

289. $y = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2+1}$.

290. $y = |x^2 - x - 6|$.

291. $y = 3\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

292. $y = 2^x + 2^{-x}$.

Найти приближенные значения вещественных корней уравнений (293, 294):

293. $x^4 - 7x - 5 = 0$.

294. $\cos x = x$.

Глава VII

Геометрические задачи

§ 1. Геометрические задачи на плоскости

76. Геометрические задачи настолько многообразны, что невозможно дать какие-либо общие указания к их решению. Поэтому мы ограничимся приведением примеров, начав с решения задач на вычисление.

Пример 258. Вершины B и C (рис. 41) при основании равнобедренного треугольника ABC соединены прямыми с серединой O его высоты, проведенной из вершины A. Эти прямые пересекают боковые стороны AC и AB треугольника в точках D и E. Найти площадь четырехугольника $AEOD$, если площадь треугольника ABC равна S.

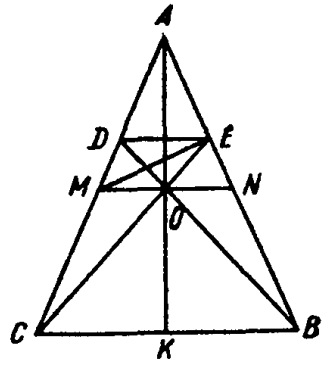

Рис. 41

Решение. Обозначим буквой S_1 искомую площадь четырехугольника $AEOD$. Проведем через точку O прямую $MN \parallel BC$ и соединим точки E и M отрезком прямой. Теперь видно, что треугольники DOE и DME равновелики и, следовательно, площадь $\triangle AEM$ равна искомой площади S_1. Но и треугольники CME и MAE также равновелики, так как у них равны основания ($CM = AM$) и общая высота, проведенная из вершины E.

Итак, площадь $\triangle ACE$ равна $2S_1$. Теперь, заметив, что $\triangle AOD = \triangle AOE$, найдем площадь $\triangle AOC$, которая равна $2S_1 - \frac{1}{2}S_1 = \frac{3}{2}S_1$. С другой стороны, положив $BC = a$ и $AK = h$, получим для площади $\triangle AOC$ величину

$$\frac{1}{2}AO \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{8}ah = \frac{1}{8}2S = \frac{1}{4}S.$$

Приравнивая эти два значения для площади $\triangle AOC$, находим $\frac{3}{2}S_1 = \frac{1}{4}S$. Отсюда $S_1 = \frac{1}{6}S$.

Пример 259. Стороны AB, BC и CA $\triangle ABC$ (рис. 42) точками M, N и P разделены в одном и том же отношении так, что $AM : MB = BN : NC = CP : PA$. Найти это отношение, если известно, что площадь $\triangle MNP$ составляет 0,28 площади $\triangle ABC$.

Решение. Обозначим площади треугольников AMP, MBN, NCP, MNP, AEC соответственно через S_1, S_2, S_3, S_4, S, а искомое отношение $\frac{m}{n} = k$. Тогда можно считать, что $AM = mx$, $MB = nx$, $AB = (m+n)x$; $PC = my$, $PA = ny$, $AC = (m+n)y$.

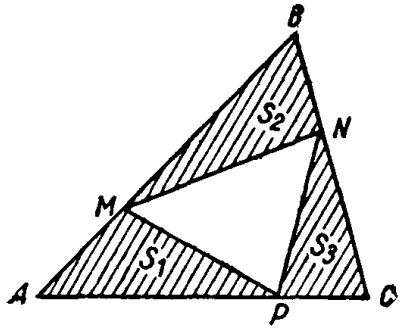

Рис 42

Рассмотрим треугольники AMP и ABC. Они имеют общий угол с вершиной в точке A, и поэтому отношение их площадей равно отношению произведений сторон, заключающих этот угол.

Итак,

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AM \cdot AP}{AB \cdot AC} = \frac{mx \cdot ny}{(m+n)x\,(m+n)y} = \frac{mn}{(m+n)^2}$$

или

$$\frac{S_1}{S} = \frac{k}{(1+k)^2}.$$

Аналогично получим

$$\frac{S_2}{S} = \frac{k}{(1+k)^2} \text{ и } \frac{S_3}{S} = \frac{k}{(1+k)^2}.$$

Так как $S_4 = 0{,}28S$ или $\frac{S_4}{S} = \frac{7}{25}$, то, складывая почленно последние четыре равенства, найдем

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{S} = \frac{3k}{(1+k)^2} + \frac{7}{25}.$$

Но числитель в левой части последнего равенства равен S, а вся дробь равна единице. Поэтому для определения k получим следующее уравнение:

$$\frac{3k}{(1+k)^2} + \frac{7}{25} = 1,$$

которое после преобразований приводится к такому:

$$6k^2 - 13k + 6 = 0.$$

Из него найдем: $k_1 = \frac{3}{2}$, $k_2 = \frac{2}{3}$.

Пример 260. Прямая, проходящая через вершину прямого угла треугольника, образует с меньшим катетом угол 30° и пересекает гипотенузу в точке, делящей ее в отношении 1 : 2. Найти длину гипотенузы, если длина меньшего катета равна $\sqrt{3}$.

Решение. Пусть прямая BD (рис. 43) наклонена к меньшему катету AB треугольника ABC под углом 30°, причем точка D лежит на гипотенузе AC. Восставим перпендикуляр AE к катету AB, где E — точка пересечения этого перпендикуляра с прямой BD. Так как катет, лежащий против угла 30°,

равен половине гипотенузы, то, положив $AE = x$, получим $BE = 2x$, $(2x)^2 = x^2 + 3$, $x^2 = 1$, $x = 1$. Но треугольники ADE и CDB подобны, потому что углы одного треугольника соответственно равны углам другого. Поэтому $\frac{BC}{AE} = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{1}$.

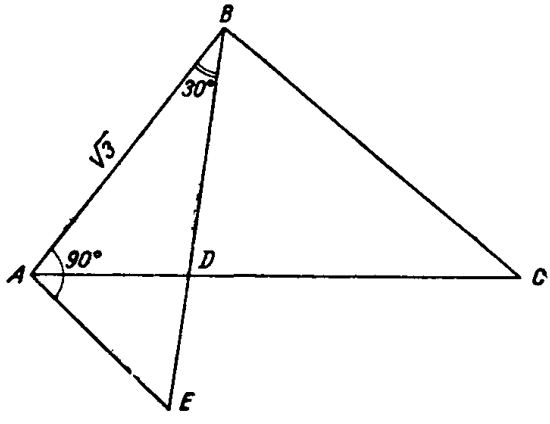

Рис. 43

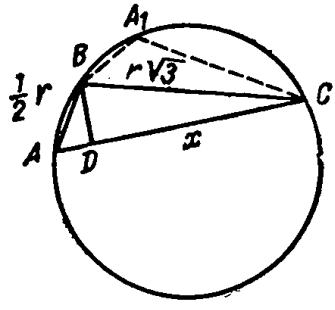

Рис. 44

Отсюда

$$\frac{BC}{1} = \frac{2}{1}; \quad BC = 2; \quad AC = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}.$$

Пример 261. Три хорды окружности радиуса r образуют вписанный в эту окружность треугольник. Зная, что длины двух из них $\frac{1}{2}r$ и $r\sqrt{3}$, найти длину третьей хорды.

Решение. Возможны два решения — $\triangle ABC$ и $\triangle A_1BC$ (рис. 44). В первом случае искомую сторону $AC = x$ находим, используя теорему о квадрате стороны треугольника, лежащей против острого угла BAC. При этом следует иметь в виду, что $\angle BAC = 60°$, как вписанный, опирающийся на дугу 120° (хорда $BC = r\sqrt{3}$ равна стороне правильного треугольника, вписанного в эту окружность).

Проведем $BD \perp AC$. Так как $\angle ABD = 30°$, то $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}r$. Поэтому из $\triangle ABC$ получим:

$$\left(r\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}r\right)^2 + x^2 - 2x \cdot \frac{r}{4}; \quad 4x^2 - 2rx - 11r^2 = 0;$$

$$x = \frac{r + \sqrt{r^2 + 44r^2}}{4} = \frac{r}{4}\left(3\sqrt{5} + 1\right).$$

Длина отрезка A_1C найдется из $\triangle A_1BC$, если воспользоваться теоремой о квадрате стороны, лежащей против тупого угла BA_1C. Эта длина равна $\frac{r}{4}\left(3\sqrt{5} - 1\right)$.

Пример 262. Две стороны треугольника равны a и b, а угол между ними равен 120°. Найти биссектрису этого угла треугольника.

Решение. Пусть данный треугольник есть $\triangle ABC$ (рис. 45), а искомая величина $CD = x$. Проведем прямую $AE \parallel CD$, где E — точка пересечения прямых AE и BC. При этом получим правильный $\triangle ACE$ со стороною b, так как $\angle ACE = 60°$ (смежный с $\angle ACB$, равным 120°), а $\angle CEA = \angle BCD = 60°$ (соответственные при параллельных прямых AE и CD и секущей BC). Если же учесть, что $\triangle BDC \sim \triangle BAE$, согласно известной лемме, то получим

$$\frac{CD}{AE} = \frac{BC}{BE} \text{ или } \frac{x}{b} = \frac{a}{a+b}.$$

Отсюда $x = \frac{ab}{a+b}$.

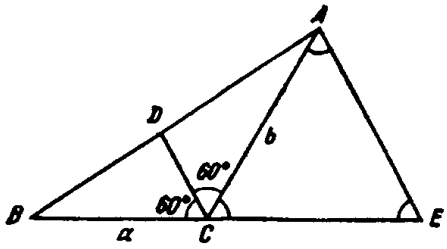

Рис. 45

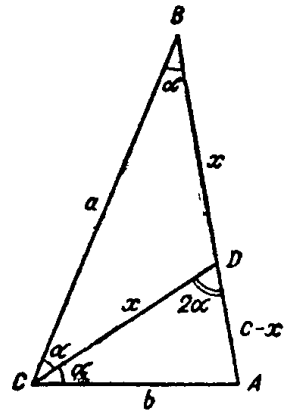

Рис. 46

Пример 263. Две стороны треугольника равны a и b. Найти третью сторону треугольника, если его угол, лежащий против этой стороны, в два раза больше угла, лежащего против стороны b.

Решение. Пусть в данном треугольнике ABC (рис. 46) искомая сторона $AB = c$. Проведем биссектрису CD угла C и положим $BD = x$, $AD = c - x$, а так как $\triangle CBD$ равнобедренный ($\angle CBD = \angle DCB$), то и $CD = x$. На основании свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника можно написать

$$\frac{c-x}{b} = \frac{x}{a}$$

или

$$c = \frac{a+b}{a}x. \qquad (*)$$

С другой стороны, $\angle ACD = \alpha$, а $\angle ADC = 2\alpha$, как внешний угол $\triangle CBD$. Но тогда два угла $\triangle ACD$ соответственно равны двум углам $\triangle ABC$, и, следовательно эти треугольники подобны. Из их подобия найдем

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{x}.$$

Перемножая почленно это равенство и равенство (*), получаем

$$c^2 = b(a+b), \quad c = \sqrt{b(a+b)}.$$

Пример 264. В круге радиуса 5 проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD (рис. 47). Найти длину хорды CD, если известно, что два диаметра этой окружности, проходящие через концы хорды AB, делят хорду CD на три равные части и что $AB = 8$.

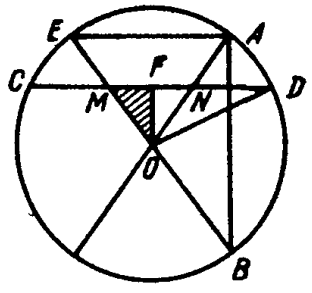

Рис. 47

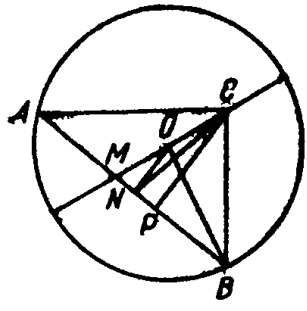

Рис. 48

Решение. Пусть искомая величина $CD = x$. Опустим из центра O круга перпендикуляр OF на хорду CD. Получим $\triangle OFM$, который, очевидно, подобен $\triangle ABE$. Так как $MF = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x = \frac{x}{6}$, а $EA = \sqrt{BE^2 - AB^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$, то из подобия треугольников OFM и BAE получим

$$\frac{OF}{MF} = \frac{AB}{AE} \text{ или } \frac{OF \cdot 6}{x} = \frac{8}{6}.$$

Отсюда $OF = \frac{2}{9} x$. Теперь из $\triangle OFD$, пользуясь теоремой Пифагора, находим:

$$\left(\frac{2}{9} x\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 25; \frac{4x^2}{81} + \frac{x^2}{4} = 25; x^2 = \frac{25 \cdot 81 \cdot 4}{97}; x = \frac{90}{\sqrt{97}}.$$

Пример 265. Гипотенуза треугольника является хордой окружности радиуса R Через вершину прямого угла этого треугольника проведен диаметр, который этой вершиной, центром окружности и точкой пересечения диаметра с гипотенузой делится на четыре равные части Найти расстояние центра окружности до гипотенузы.

Решение. Пусть дан $\triangle ABC$ (рис. 48) с гипотенузой AB, окружность радиуса R с центром в точке O и диаметр, пересекающий прямую AB в точке M. Положив искомое расстояние $ON = x$, проведем $CP \parallel ON$, где P — точка на гипотенузе AB, и соединим N и C отрезком прямой. Из $\triangle MCP$ на основании свойства средней линии треугольника заключаем, что

$CP = 2 \cdot ON = 2x$, а $MN = NP$. Так как медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то $CN = \frac{1}{2} AB = NB$. Положим $MN = NP = y$, $CN = NB = z$. Тогда, учитывая равенство $OM = \frac{1}{2} R$, из треугольников ONB, CNP и OMN на основании теоремы Пифагора соответственно получаем:

$$x^2 = R^2 - z^2;\ (2x)^2 = z^2 - y^2;\ x^2 = \left(\frac{1}{2} R\right)^2 - y^2.$$

Складывая почленно первые два уравнения и затем вычитая из результата третье, находим:

$$(2x)^2 = R^2 - \left(\frac{1}{2} R\right)^2,\ 4x^2 = \frac{3}{4} R^2,\ x = \frac{\sqrt{3}}{4} R.$$

Пример 266. Через точку M (рис. 49) основания AC треугольника ABC проведены прямые MN и MP, параллельные

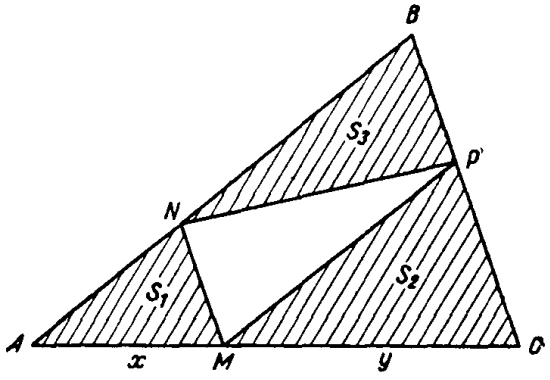

Рис. 49

сторонам треугольника. Точки N и P пересечения этих прямых со сторонами треугольника соединены отрезком прямой. Найти площадь треугольника NBP, если площади треугольников ANM и MPC равны соответственно S_1 и S_2.

Решение. Пусть $AM = x$, $MC = y$, площади треугольников NBP и ABC соответственно S_3 и S. Так как треугольники AMN и MPC по известной лемме подобны $\triangle ABC$, то можно написать:

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{x}{x+y};\ \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{y}{x+y}.$$

Сложив эти равенства, найдем, что

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{x+y}{x+y} = 1;\ \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2};$$

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

Поэтому для искомой площади получим

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot S_{NMPB} = \frac{1}{2}(S - S_1 - S_2) =$$

$$= \frac{1}{2}[(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2 - S_1 - S_2] = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{S_1 S_2} = \sqrt{S_1 S_2}$$

Пример 267. Каждая вершина параллелограмма соединена прямой с серединами двух его сторон, исходящих из противоположной вершины. Найти площадь восьмиугольника, ограниченного отрезками этих прямых, если площадь параллелограмма S.

Решение. Нетрудно видеть, что восьмиугольник состоит из 8 треугольников, равновеликих треугольнику PQO (рис. 50). С другой стороны, $\triangle MPQ$ также равновелик треугольнику PQO. Действительно, высота QT у них общая, а основания MP и PO равны. Поэтому $S_{MRO} = \frac{3}{8} S_1$, где S_1 — искомая площадь. Но основание MO треугольника MRO равно половине основания

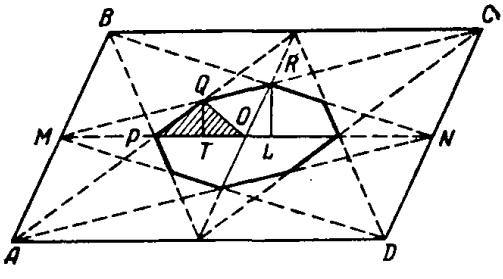

Рис 50

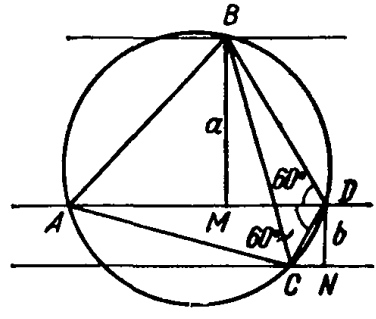

Рис. 51

параллелограмма, а высота RL составляет четверть высоты параллелограмма, так что $S_{MRO} = \frac{1}{16} S$. Тогда $\frac{3}{8} S_1 = \frac{1}{16} S$ и $S_1 = \frac{1}{6} S$.

Пример 268. Найти сторону правильного треугольника, вершины которого лежат на трех параллельных прямых, если эти прямые находятся в одной плоскости и средняя из них отстоит от двух других на расстояниях, равных a и b.

Решение. Опишем окружность вокруг правильного треугольника ABC (рис. 51). Пусть D есть точка пересечения окружности со средней прямой. Соединим D с вершинами B и C отрезками прямых, опустим перпендикуляр BM из точки B на прямую AD, где M — основание этого перпендикуляра, и рассмотрим $\triangle BMD$. В этом треугольнике $\angle BDM = 60°$, так как $\angle BDM = \angle BCA$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AB, причем $\angle BCA$ есть угол правильного треугольника.

Поэтому получим $BD = \frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Проведя $DN \perp CN$, где $CN \parallel AD$, из $\triangle CDN$, аналогично найдем $CD = \frac{2b}{\sqrt{3}}$. Зная BD и CD и пользуясь теоремой косинусов, из $\triangle BDC$ находим

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot CD \cos 120^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + b^2 + ab}.$$

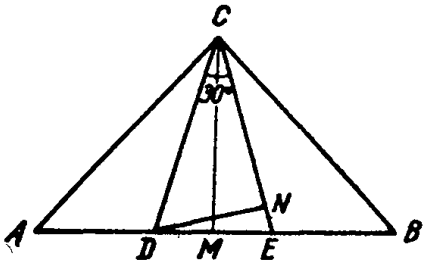

Рис. 52

При желании можно было бы решить задачу, не пользуясь тригонометрией. Тогда пришлось бы привлечь теорему о квадрате стороны треугольника, лежащей против тупого угла, и теорему о том, что катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.

Пример 269. Две прямые, проходящие через вершину прямого угла равнобедренного треугольника, делят этот угол на три равные части. Найти длины отрезков, на которые разобьется этими прямыми гипотенуза, если ее длина равна c.

Решение. Пусть $\triangle ABC$ (рис. 52) есть данный прямоугольный треугольник с гипотенузой c. Очевидно, высота треугольника $CM = \frac{1}{2}c$, а $\angle DCE = 30^\circ$. Положим $CD = CE = x$. Тогда высота DN треугольника DCE равна $\frac{1}{2}x$, как катет прямоугольного $\triangle DCN$, лежащий против угла 30°.

Подсчитаем площадь $\triangle DCE$ двумя способами и приравняем полученные для нее выражения. Будем иметь $\frac{1}{2} DE \cdot CM = \frac{1}{2} CE \cdot DN$. Отсюда $DE \cdot \frac{c}{2} = x \cdot \frac{x}{2}$, $DE = \frac{x^2}{c}$, а $DM = \frac{1}{2} DE = \frac{x^2}{2c}$.

Обратимся теперь к $\triangle DCM$. Из него на основании теоремы Пифагора получим:

$$x^2 = \left(\frac{x^2}{2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2; \quad x^4 - 4c^2x^2 + c^4 = 0; \quad x^2 = 2c^2 \pm \sqrt{3c^4} = c^2(2 \pm \sqrt{3}).$$

Отсюда $DE = \frac{x^2}{c} = c(2 - \sqrt{3})$. Знак плюс перед радикалом отброшен, так как DE не может быть больше c. Далее находим $AD = BE = \frac{1}{2}(AB - DE) = \frac{1}{2}[c - c(2 - \sqrt{3})] = \frac{c}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

Еще проще эта задача решается тригонометрически. Так, из $\triangle DMC$, учитывая, что $\angle DCM = 15°$, получаем

$$DE = 2 \cdot DM = 2 \cdot CM \cdot \operatorname{tg} 15° = 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{1 - \cos 30°}{\sin 30°} = c(2 - \sqrt{3}).$$

Пример 270. Найти угол между высотой и медианой треугольника, проведенными из одной и той же вершины, зная углы α, β и γ треугольника.

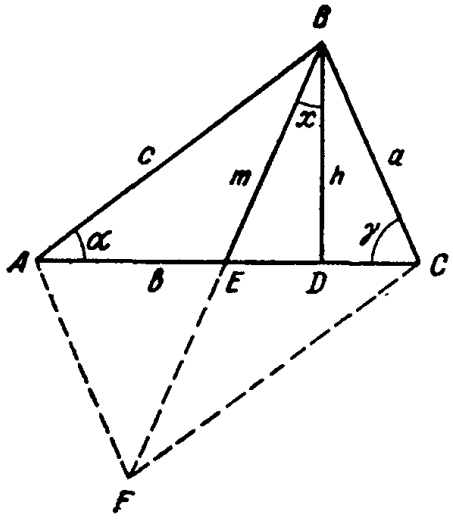

Рис. 53

Решение. Обозначим стороны треугольника ABC (рис. 53) через a, b, c. Проведем высоту BD и медиану BE, обозначив их

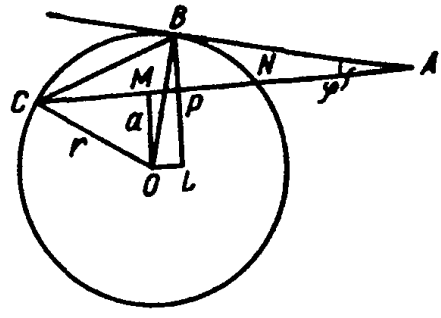

Рис. 54

длины через h и m. Для искомого угла x будем иметь $\cos x = \frac{h}{m} = \frac{c \sin \alpha}{m}$. Выразим медиану m через стороны треугольника Для этого продолжим BE на длину $EF = m$ и соединим F с A и C. Из полученного параллелограмма $ABCF$ найдем, что $(2m)^2 + b^2 = 2a^2 + 2c^2$ или $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$. Поэтому $\cos x = \frac{2c \sin \alpha}{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}$. Воспользуемся теперь теоремой синусов, заменив в полученной формуле a, b и c с помощью равенств: $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$, $c = 2R \sin \gamma$. Это даст

$$\cos x = \frac{2 \sin \alpha \sin \gamma}{\sqrt{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \gamma - \sin^2 \beta}}.$$

Пример 271. Из точки A (рис. 54) проведены к окружности радиуса r касательная AB, где B — точка касания ее с окружностью, и секущая ANC. Секущая наклонена к касательной под углом φ, удалена от центра окружности на расстояние a и находится от него по ту же сторону, что и касательная AB. Из двух точек C и N пересечения секущей и окружности точка N ближайшая к A. Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение. Из центра O окружности проведем в точку B радиус OB. Из точки B опустим перпендикуляр BP на сторону AC и из центра O опустим на BP перпендикуляр OL, где P — основание перпендикуляра BP, а L — точка пересечения прямых BP и OL. Замечаем, что $\angle OBL = \angle CAB = \varphi$ в силу перпендикулярности сторон этих углов, поэтому высота BP треугольника ABC легко найдется из треугольника OBL. Действительно, $BP = BL - PL = r\cos\varphi - a$. Чтобы найти основание AC, опустим из центра O на хорду CN перпендикуляр OM, основание которого M разделит эту хорду пополам. Получим

$$AC = CM + MP + PA = \sqrt{r^2 - a^2} + OL + BP\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{r^2 - a^2} + r\sin\varphi + (r\cos\varphi - a)\operatorname{ctg}\varphi =$$

$$= \sqrt{r^2 - a^2} + r\sin\varphi + \frac{r\cos^2\varphi - a\cos\varphi}{\sin\varphi} = \sqrt{r^2 - a^2} + \frac{r(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - a\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\sqrt{r^2 - a^2}\sin\varphi + r - a\cos\varphi\right)$$

Следовательно, искомая площадь

$$S = \frac{r\cos\varphi - a}{2\sin\varphi}\left(\sqrt{r^2 - a^2}\sin\varphi + r - a\cos\varphi\right).$$

Пример 272. Найти площадь треугольника, зная длины его сторон a и b и длину биссектрисы l угла, заключенного между этими сторонами.

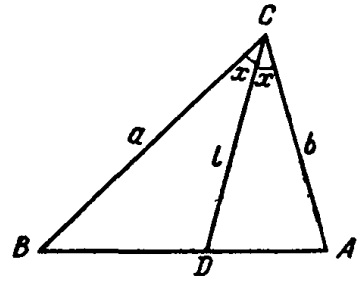

Рис. 55

Решение. 1. Обозначим половину $\angle BCA$ (рис. 55) буквой x. Так как площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между этими сторонами, то искомая площадь $S = \frac{1}{2}ab\sin 2x$. Остается найти $\sin 2x$. Для этого заметим, что площадь $\triangle ABC$ равна сумме площадей треугольников BCD и DCA. Поэтому можно написать:

$$\frac{1}{2}ab\sin 2x = \frac{1}{2}al\sin x + \frac{1}{2}bl\sin x,\ ab\sin x\cos x = \frac{(a+b)l}{2}\sin x,\ ab\cos x = \frac{(a+b)l}{2},\ \cos x = \frac{(a+b)l}{2ab},\ \sin x =$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{(a+b)^2 l^2}{4a^2b^2}} = \frac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a+b)^2 l^2}.$$

Теперь найдем, что искомая площадь

$$S = \frac{ab}{2}\sin 2x = ab\cos x\sin x = \frac{(a+b)l}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a+b)^2 l^2}.$$

2. Эту задачу можно решить и чисто геометрически. Площадь треугольника вычислим по формуле Герона, если предварительно найдем третью сторону треугольника. Так как по теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника отрезки BD (рис. 56) и DA третьей стороны пропорциональны сторонам a и b треугольника, то можно написать, что $BD = ax$ и $DA = bx$. Остается найти x. Для этого опишем окружность вокруг $\triangle ABC$, продолжим биссектрису CD до пересечения ее с окружностью в точке M и воспользуемся подобием треугольников CDA и CBM

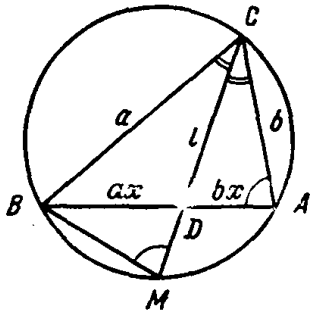

Рис 56

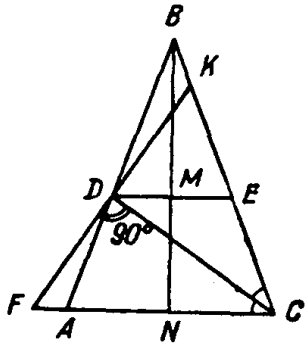

Рис. 57

Из подобия найдем

$$\frac{a}{l + DM} = \frac{l}{b} \text{ или } ab = l^2 + l \cdot DM.$$

Но произведения отрезков пересекающихся хорд равны, так что

$$ax \cdot bx = l \cdot DM.$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, получаем:

$$ab = l^2 + abx^2; \quad x^2 = 1 - \frac{l^2}{ab},$$

$$AB = (a + b)\, x = (a + b) \sqrt{1 - \frac{l^2}{ab}}.$$

Теперь известны три стороны треугольника, и его площадь легко найти.

Замечание. Равенство $ab = l^2 + abx^2$ можно записать так: $l^2 = ab - BD \cdot DA$. Таким образом, попутно нами доказана теорема: *квадрат биссектрисы треугольника равен разности произведений двух сторон треугольника, между которыми находится биссектриса, и отрезков третьей стороны, на которые рассекает ее биссектриса*

Эту теорему можно использовать при вычислении биссектрис треугольника, когда известны его стороны

Пример 273. В равнобедренном треугольнике ABC (рис. 57) с основанием AC проведена биссектриса CD треугольника, где D — точка на боковой стороне AB. Из точки D проведены пря-

мые $DF \perp DC$ и $DE \parallel AC$, причем точка F лежит на основании треугольника или его продолжении, а E принадлежит BC. Биссектриса угла B пересекает прямую DE в точке M. Доказать, что $DM = \frac{1}{4} FC$.

Доказательство. Продолжим отрезок прямой FD до пересечения с BC в точке K. Получим равные прямоугольные треугольники CDF и CDK, имеющие общий катет CD и по равному острому углу при общей вершине C. Отсюда следует, что

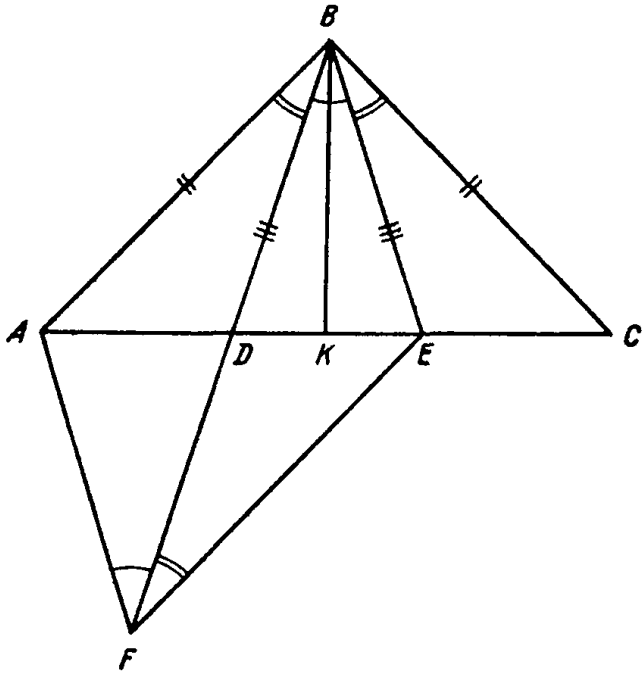

Рис 58

$FD = DK$, а тогда $DE = \frac{1}{2} FC$, как средняя линия $\triangle KFC$. С другой стороны, очевидно, $DM = \frac{1}{2} DE$, откуда получаем, что $DM = \frac{1}{4} FC$.

Пример 274. Основание равнобедренного треугольника разделено на три равные части и точки деления соединены прямыми с вершиной треугольника. Доказать, что угол между этими прямыми будет наибольшим из тех углов, на которые делят прямые угол треугольника.

Доказательство. Дано, что $BA = BC$ (рис. 58) и $AD = DE = EC$. Нужно доказать, что $\angle DBE > \angle ABD$.

Так как $\triangle ABD = \triangle CBE$ (по первому признаку равенства треугольников), то $\angle ABD = \angle CBE$ и $BD = BE$. Кроме того,

$BD < AB$, потому что проекция $DK = \frac{1}{3} AK$ отрезка BD меньше проекции AK отрезка BA. Продолжим BD на отрезок $DF = BD$ и точку F соединим с точками A и E. Диагонали AE и BF четырехугольника $ABEF$ точкой пересечения D делятся пополам, и, следовательно, этот четырехугольник — параллелограмм. Поэтому $FE = AB > BE$ и $\angle ABD = \angle DFE$. Рассмотрим $\triangle BEF$. Во всяком треугольнике против большей стороны лежит и больший угол, а так как $FE > BE$, то $\angle DBE > \angle DFE$ или $< DBE > \angle ABD$.

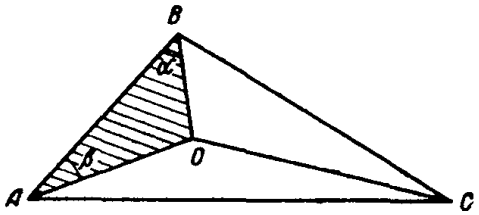

Рис. 59

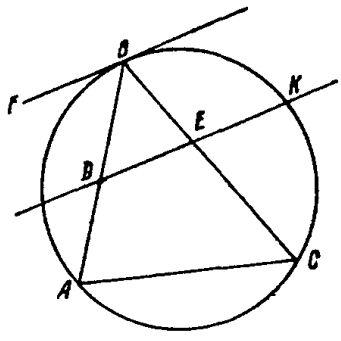

Рис. 60

Пример 275. Доказать, что вершина наибольшего угла треугольника лежит ближе к центру вписанной в треугольник окружности, чем любая другая его вершина.

Доказательство. Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 59) $\angle ABC > \angle CAB$. Покажем, что $OB < OA$, где O — центр окружности, вписанной в треугольник.

Для доказательства рассмотрим $\triangle ABO$. Его угол $\alpha = \frac{1}{2} \angle ABC$, потому что центр O лежит на биссектрисе BO угла ABC. Точно так же $\beta = \frac{1}{2} \angle CAB$. Но тогда $\beta < \alpha$, а так как в треугольнике против меньшего угла лежит меньшая сторона, то $OB < OA$.

Пример 276. Доказать, что прямая, параллельная касательной, проведенной через вершину треугольника, вписанного в окружность, и пересекающая две стороны треугольника, отсекает от него четырехугольник, вокруг которого можно описать окружность.

Доказательство. Пусть $\triangle ABC$ (рис. 60) вписан в окружность и BF — касательная к этой окружности. Проведем любую прямую DE, которая пересекает стороны AB и BC треугольника в точках D и E, а окружность в точке K, причем E лежит между D и K. Требуется доказать, что вокруг четырехугольника $ADEC$ можно описать окружность. Для этого достаточно убедиться, что $\angle DAC + \angle DEC = 180°$. Но $\angle DAC$, как

вписанный в окружность, измеряется $\frac{1}{2} \cup BKC$, а $\angle DEC = \angle FBC$ (соответственные) и потому измеряется $\frac{1}{2} \cup BAC$, а следовательно, $\angle DAC + \angle DEC = 180°$, так как $\frac{1}{2} \cup BKC + \frac{1}{2} \cup BAC = \frac{1}{2} 360° = 180°$.

Пример 277. Доказать, что если стороны угла пересечены параллельными прямыми и из точек пересечения каждой прямой со сторонами угла восставлены перпендикуляры к сторонам угла до их взаимного пересечения, то точки пересечения соответствующих пар перпендикуляров лежат на одной прямой.

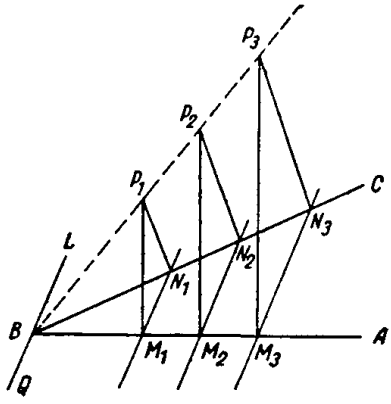

Рис. 61

Доказательство. Пусть $M_1N_1 \parallel M_2N_2 \parallel M_3N_3 \parallel \ldots$; M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, ... перпендикулярны AB, а прямые N_1P_1, N_2P_2, N_3P_3, ... перпендикулярны BC (рис. 61). Требуется доказать, что точки P_1, P_2, P_3, ... лежат на одной прямой.

Если проведем через вершину B угла прямую $LQ \parallel M_1N_1$, то убедимся, что точка B также принадлежит геометрическому месту точек P_k. Поэтому достаточно доказать, что две любые точки P_k, например P_1 и P_2, лежат на прямой, проходящей через точку B. С другой стороны, для этого достаточно доказать, что $\angle P_1BM_1 = \angle P_2BM_2$. С этой целью заметим, что треугольники $P_1N_1M_1$ и $P_2N_2M_2$ подобны, так как они имеют соответственно параллельные стороны, и поэтому можно написать $\frac{P_1M_1}{P_2M_2} = \frac{M_1N_1}{M_2N_2}$. Подобными являются и треугольники N_1M_1B и N_2M_2B, как отсеченные параллельными прямыми от одного и того же угла. Из их подобия получим $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{BM_1}{BM_2}$. Сравнив две пропорции, найдем $\frac{P_1M_1}{P_2M_2} = \frac{BM_1}{BM_2}$. Кроме того, $\angle BM_1P_1 = \angle BM_2P_2 = 90°$. Следовательно, подобными будут также треугольники BM_1P_1 и BM_2P_2, как имеющие по равному углу, заключенному между пропорциональными сторонами. Но тогда $\angle P_1BM_1 = \angle P_2BM_2$ и точки B, P_1 и P_2 лежат на одной прямой.

Пример 278. Доказать, что проекции вершины треугольника на четыре биссектрисы внутренних и внешних углов этого треугольника при двух других его вершинах лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть ABC (рис. 62) — любой тре-

угольник, BA_1 и BA_2 — биссектрисы внутреннего и внешнего углов этого треугольника при вершине B и точки A_1 и A_2 — проекции вершины A на эти биссектрисы. Так как $\angle AA_1B = \angle AA_2B = 90°$ по построению, а $\angle A_1BA_2 = 90°$, как половина развернутого угла, то четырехугольник AA_1BA_2 — прямоугольник. Диагонали A_2A_1 и AB этого прямоугольника одинаково наклонены к стороне A_2B, т. е. $\angle A_1A_2B = \angle A_2BA$, а так как BA_2 — биссектриса угла ABK, то $\angle A_2BA = \angle A_2BK$. Следовательно, $\angle A_1A_2B = \angle A_2BK$.

Углы A_1A_2B и A_2BK являются накрест лежащими при прямых A_1A_2 и BC и секущей A_2B. Поэтому $A_1A_2 \parallel BC$. Но диагонали A_1A_2 и AB прямоугольника AA_1BA_2 в точке их пересечения O_1 делятся пополам. Значит, прямая A_1A_2 проходит через середину O_1 стороны AB, и так как $A_1A_2 \parallel BC$, то она пройдет и через середину O_2 стороны AC.

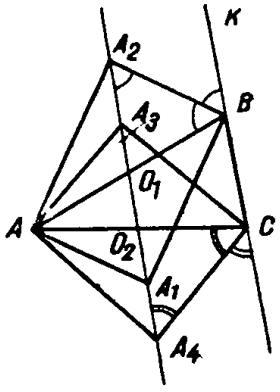

Рис. 62

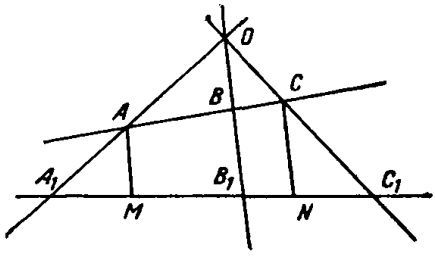

Рис. 63

Если теперь построим проекции A_3 и A_4 вершины A на биссектрисы CA_3 и CA_4 внутреннего и внешнего углов треугольника при вершине C, то точно так же убедимся в том, что диагональ A_3A_4 прямоугольника AA_3CA_4 пройдет через середины O_1 и O_2 сторон AB и AC треугольника ABC. Но две точки вполне определяют прямую. Следовательно, прямые A_1A_2 и A_3A_4 совпадут, что и доказывает теорему.

Пример 279. Три прямые, проходящие через точку O (рис. 63), пересекаются двумя другими прямыми соответственно в точках A и A_1, B и B_1, C и C_1. Доказать, что в этом случае имеет место соотношение

$$\frac{AO}{CO} : \frac{A_1O}{C_1O} = \frac{AB}{BC} : \frac{A_1B_1}{B_1C_1}.$$

Решение. Проведем $AM \parallel BB_1$ и $CN \parallel BB_1$, где M и N — точки пересечения прямой A_1C_1 с прямыми AM и CN. Воспользуемся теперь теоремой: стороны угла, пересекаемые рядом параллельных прямых, рассекаются ими на пропорциональные части Применяя эту теорему в отношении углов OA_1C_1 и OC_1A_1, получаем:

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{MB_1}{A_1B_1} \text{ и } \frac{CO}{C_1O} = \frac{B_1N}{B_1C_1}.$$

Разделим первое равенство почленно на второе. Это даст

$$\frac{AO}{A_1O} : \frac{CO}{C_1O} = \frac{MB_1}{A_1B_1} : \frac{B_1N}{B_1C_1}$$

или

$$\frac{AO}{CO} : \frac{A_1O}{C_1O} = \frac{MB_1}{B_1N} : \frac{A_1B_1}{B_1C_1}. \qquad (*)$$

Если секущие AC и A_1C_1 пересекаются, то на основании той же теоремы можно написать

$$\frac{MB_1}{B_1N} = \frac{AB}{BC}.$$

Если же они параллельны, то справедливость последнего равенства следует из теоремы о равенстве противоположных сторон параллелограмма. Заменяя в равенстве (*) отношение $\frac{MB_1}{B_1N}$ на $\frac{AB}{BC}$, получаем окончательно

$$\frac{AO}{CO} : \frac{A_1O}{C_1O} = \frac{AB}{BC} : \frac{A_1B_1}{B_1C_1}.$$

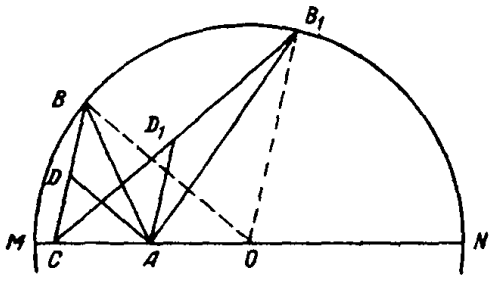

Рис 64

77. Приведем несколько задач на отыскание геометрических мест и построенне. Напомним, что геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, называется множество *всех* точек, обладающих этим свойством.

Чтобы доказать, что фигура l является геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, достаточно доказать две теоремы: 1) если точка обладает указанным свойством, то она принадлежит фигуре l; 2) если точка принадлежит фигуре l, то она обладает этим свойством.

Методы решения задач на построение весьма обстоятельно излагаются и иллюстрируются примерами в школьных учебниках. Поэтому здесь будет приведено лишь небольшое число задач на построение и прн решении их будет обращено внимание главным образом на *построение* и *доказательство*.

Пример 280. Вершина B (рис. 64) треугольнпка ABC перемещается так, что длина меднаны AD остается неизменной, а сторона AC — неподвижной. Найти геометрическое место точек B.

Решение. 1. Проведем прямую $BO \parallel AD$ до пересечения ее с продолженнем основания AC треугольника в точке O. Точка O делит отрезок AC внешним образом в отношении 2 : 1. Действнтельно, по свойству параллельных, пересекающих стороны угла, имеем $\frac{OC}{OA} = \frac{BC}{BD} = \frac{2}{1} = 2$. Следовательно, точка O неподвижна для любого положения вершины B. Кроме того, $\frac{BO}{AD} = \frac{BC}{CD} = 2$,

откуда видно, что вершина B в любом положении треугольника отстоит от неподвижной точки O на одно и то же расстояние $BO = 2AD$. Итак, вершина B находится на окружности радиуса $r = 2AD$ с центром в точке O, расположенным на продолжении стороны AC за вершину A на расстоянии $OA = AC$.

2. Возьмем любую точку B_1 на построенной окружности, отличную от точек M и N, и соединим ее с точками A, C и O. Проведем $AD_1 \parallel OB_1$. Отрезок AD_1 будет медианой $\triangle AB_1C$. Действительно, по свойству параллельных линий, пересекающих стороны угла, имеем $\frac{B_1D_1}{CD_1} = \frac{OA}{AC} = 1$, так что $B_1D_1 = D_1C$. С другой стороны, $\frac{AD_1}{OB_1} = \frac{AC}{OC} = \frac{1}{2}$, $AD_1 = \frac{1}{2}OB_1 = AD$ и точка B_1 является вершиной рассматриваемых треугольников. Таким образом, найденная окружность, за исключением точек M и N, и является искомым геометрическим местом.

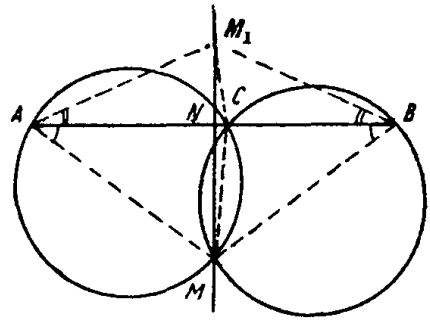

Рис 65

Пример 281. Через точки A и C отрезка AB (рис. 65) и через точки C и B того же отрезка проводятся равные окружности, пересекающиеся в точках C и M. Найти геометрическое место точек M.

Решение. 1. Соединим точку M с точками A, C и B. Получим равнобедренный $\triangle MAB$, так как $\angle MAB = \angle MBA$, как измеряющиеся равными дугами. Следовательно, точка M равноудалена от концов отрезка AB и лежит на перпендикуляре к нему, восставленном из его середины N.

2. Возьмем любую точку M_1 на перпендикуляре к отрезку AB, восставленном из его середины N, отличную от точки N. Через три точки A, C и M_1 можно провести окружность и притом только одну. Ее радиус по теореме синусов равен $r = \frac{CM_1}{2\sin \angle M_1AB}$. Точно так же можно провести единственную окружность через точки C, B и M_1; ее радиус $r_1 = \frac{CM_1}{2\sin \angle M_1BA} = r$.

Итак, искомое геометрическое место есть перпендикуляр, восставленный к отрезку AB из его середины N, исключая точку N.

Пример 282. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная.

Решение. 1. Пусть данные точки будут A и B (рис. 66), а данное отношение $m:n$. Будем считать $m \neq n$, например $m > n$,

так как $m = n$ даст, как известно, перпендикуляр к AB, восставленный из его середины.

Пусть точка M обладает данным свойством, а именно $AM : MB = m : n$. Соединим точку M с точками A и B и проведем биссектрисы MM_1 и MM_2 смежных углов AMB и BMC до пересечения их с прямой AB соответственно в точках M_1 и M_2

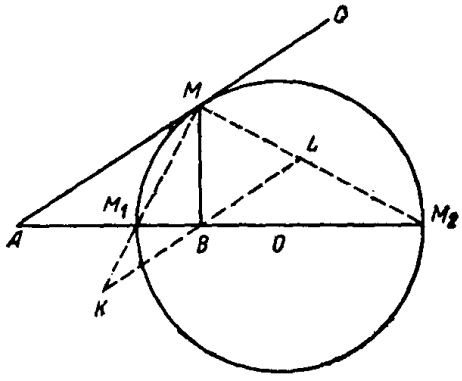

Рис. 66

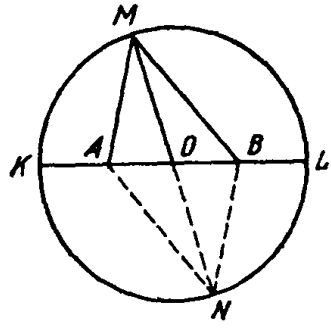

Рис. 67

Каждая из этих точек делит отрезок AB в отношении $m : n$: первая — внутренним образом, а вторая — внешним. Это утверждение следует из теорем о биссектрисе внутреннего и биссектрисе внешнего углов треугольника. Положение точек M_1 и M_2 не зависит от положения точки M. Угол M_1MM_2, как угол между биссектрисами смежных углов, равен 90°. Следовательно, точка M лежит на окружности радиуса $\frac{1}{2} M_1M_2$ с центром в середине O отрезка M_1M_2.

2. Возьмем любую точку M на окружности диаметра M_1M_2 с центром в точке O. Соединим ее с точками A, B, M_1 и M_2 и проведем через точку B прямую $KL \parallel AM$ до пересечения ее с MM_2 в точке L и с прямой MM_1 в точке K. Легко доказать, что $\triangle AM_1M \sim \triangle BM_1K$ и $\triangle BLM_2 \sim \triangle AMM_2$. Из их подобия получим: $\frac{AM}{KB} = \frac{AM_1}{M_1B} = \frac{m}{n}$, $\frac{AM}{LB} = \frac{AM_2}{M_2B} = \frac{m}{n}$. Отсюда вытекает, что $KB = LB$, т. е. MB — медиана прямоугольного треугольника KML, которая, как известно, равна половине гипотенузы. Итак, $MB = BL$. Заменяя в последней пропорции LB на MB, получим $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$. Следовательно, произвольная точка M окружности принадлежит рассматриваемому геометрическому месту.

Таким образом, искомое геометрическое место точек есть окружность диаметра M_1M_2 с центром в точке O. Величину диаметра окружности и положение ее центра (расстояние OA или OB) легко найти с помощью данных чисел m, n и расстояния AB.

Пример 283. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до концов данного отрезка есть величина постоянная.

Решение. 1. Пусть $AB = 2a$ (рис. 67) есть данный отрезок, а точка M — любая точка искомого геометрического места, так что $MA^2 + MB^2 = m$, где m — данная постоянная величина. Соединим точку M с серединой O отрезка AB отрезком прямой OM и продолжим его на длину $ON = OM$.

Соединив точку N с точками A и B прямыми, видим, что в четырехугольнике $ANBM$ диагонали MN и AB делятся точкой O — точкой их пересечения — пополам. Следовательно, этот четырехугольник — параллелограмм и сумма квадратов его диагоналей равна сумме квадратов всех сторон параллелограмма. Итак, $(2 \cdot OM)^2 + (2 \cdot OB)^2 = 2 \cdot MA^2 + 2 \cdot MB^2$, $2 \cdot OM^2 + 2 \cdot OB^2 = MA^2 + MB^2$, $2 \cdot OM^2 + 2a^2 = m$; $OM^2 = \frac{m - 2a^2}{2}$; $OM = \sqrt{\frac{m - 2a^2}{2}}$.

Последнее равенство показывает, что любая точка искомого геометрического места удалена от середины O отрезка AB на одно и то же расстояние $r = \sqrt{\frac{m - 2a^2}{2}}$, т. е. она находится на окружности радиуса r с центром в точке O.

2. Возьмем любую точку M (рис. 67) окружности радиуса $r = \sqrt{\frac{m - 2a^2}{2}}$ с центром в середине O отрезка AB. Соединив ее с A и B отрезками прямых и дополнив до параллелограмма $ANBM$, можем написать

$$2 \cdot MA^2 + 2 \cdot MB^2 = AB^2 + MN^2 = 4a^2 + 4 \cdot \frac{m - 2a^2}{2} = 4a^2 + 2m - 4a^2 = 2m.$$

Отсюда

$$MA^2 + MB^2 = m.$$

Итак, искомое геометрическое место точек есть окружность с центром в середине O отрезка AB и радиуса $r = \sqrt{\frac{m - 2a^2}{2}}$.

Легко проверить, что точки K и L пересечения прямой AB с окружностью не исключаются. Проверим это, например, для точки K. Так как $OK = r$ и $OA = a$, то

$$KA^2 + KB^2 = (r - a)^2 + (r + a)^2 = 2r^2 + 2a^2 = 2 \cdot \frac{m - 2a^2}{2} + 2a^2 = m - 2a^2 + 2a^2 = m.$$

Пример 284. Найти геометрическое место центров окружностей, вписанных в прямоугольные треугольники, общей гипотенузой которых служит неподвижный отрезок данной длины.

Решение. 1. Пусть $AB = c$ есть данная гипотенуза и M — любая точка искомого геометрического места (рис. 68). Соединим центр M вписанной в прямоугольный треугольник ABC окружности с точками A и B. Так как центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника, то $\angle MAB + \angle MBA = \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle CBA) = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$, а $\angle AMB = 135°$ и, следовательно, точка M находится на дуге окружности, проходящей через точки A и B и вмещающей угол 135°. Дуга AMB, очевидно, равна 90°, и гипотенуза c есть сторона квадрата, вписанного в эту окружность. Поэтому радиус окружности найдется из формулы $c = R\sqrt{2}$, что даст $R = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

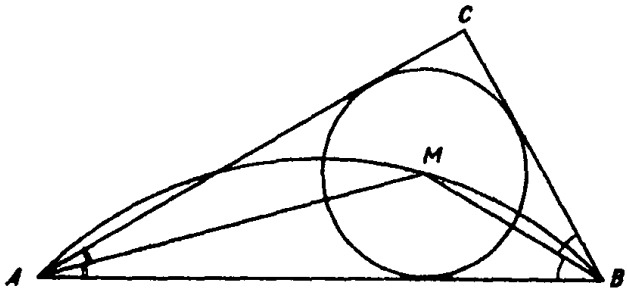

Рис 68

2. Возьмем на дуге окружности, проходящей через точки A и B (рис. 68) и вмещающей угол 135°, любую точку M и соединим ее отрезками прямых с точками A и B. Так как по условию $\angle AMB = 135°$, то $\angle MAB + \angle MBA = 45°$. Если к $\angle MAB$ приложить равный ему $\angle MAC$ так, чтобы эти два угла находились по разные стороны относительно прямой AM, а к $\angle MBA$ приложить равный ему $\angle MBC$, расположенный по другую сторону от BM, чем $\angle MBA$, то полупрямые AC и BC пересекутся, образуя $\triangle ABC$. Этот треугольник будет прямоугольным, потому что $\angle CAB + \angle CBA = 2(\angle MAB + \angle MBA) = 90°$, а полупрямые AM и BM будут биссектрисами его острых углов. Таким образом, точка M является точкой пересечения биссектрис треугольника и, следовательно, центром окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с гипотенузой AB.

Если учесть, что треугольники могут иметь вершины C по разные стороны от гипотенузы, то искомое геометрическое место точек есть две дуги окружности, каждая из которых проходит через точки A и B и вмещает угол 135°.

Пример 285. Через данную точку провести секущую к окружности так, чтобы ее внешняя часть равнялась внутренней.

Решение. Очевидно, задача не имеет решения, если точка

лежит на окружности или внутри окружности. Пусть точка A (рис. 69) — данная точка, а окружность l с центром в точке O — данная окружность. Предположим, что задача решена и секущая AB есть искомая, т. е. $AC = CB$, где C — точка пересечения прямой AB с данной окружностью. Соединим точки A и B с центром O и проведем прямую $CM \parallel OB$, где M — точка пересечения CM и OA. Отсюда видим, что точка C находится от точки M на расстоянии CM, равном, согласно свойству средней линии треугольника, половине радиуса данной окружности. Итак, точка C, определяющая положение искомой секущей AB, является точкой пересечения данной окружности и окружности с центром в середине M отрезка OA радиуса, в два раза меньшего радиуса данной окружности. Из этого *анализа* вытекает следующее *построение*, которое проводим на том же рисунке. Соединяем данную точку A с центром O данной окружности и делим отрезок AO точкой M пополам. Из точки M, как из центра, проводим окружность радиуса $\frac{1}{2}r$, где r — радиус данной окружности, и, найдя точку C пересечения этой окружности с данной, проводим секущую ACB, которая и будет искомой. Последнее утверждение требует *доказательства*. Для этого соединим точки M и C отрезком и проведем $OB_1 \parallel MC$. Точка B_1 (на рис. 69 она не изображена) пересечения OB_1 и секущей будет принадлежать и окружности, так как $OB_1 = 2CM$. Таким образом, точки B_1 и B совпадают, что и доказывает правильность построения. Остается провести *исследование*. Возможность решения и число решений зависит от наличия точек пересечения построенной окружности с данной. Учитывая, что радиусы окружностей r и $\frac{1}{2}r$, и полагая $OA = a$, получаем (см. $\triangle OCM$) следующие результаты. 1) задача не имеет решения, если $r + \frac{1}{2}r < \frac{1}{2}a$ или $3r < a$; 2) задача имеет единственное решение, если $r + \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}a$ или $3r = a$; 3) задача имеет два решения, если $3r > a$. При этом с самого начала мы предположили, что $r < a$ (точка A лежит вне окружности l).

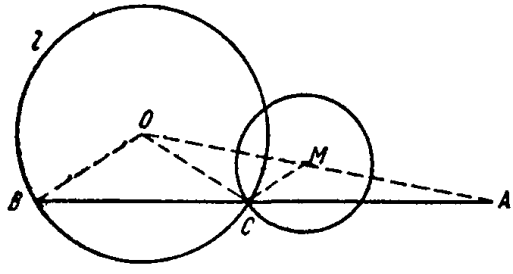

Рис. 69

Пример 286. В данный сектор вписать квадрат так, чтобы одна его вершина лежала на дуге сектора, а три другие — на радиусах.

Решение. Пусть дан сектор OAB (рис. 70). Построим какой-нибудь квадрат $M_1N_1P_1Q_1$, три вершины которого лежат на радиусах, ограничивающих сектор, а одна — внутри сектора. Проведем через эту последнюю вершину P_1 и точку O прямую, которая пересечет дугу сектора в точке P. Проведем прямую $PN \parallel OA$ до пересечения с радиусом OB в точке N и опустим из точек N и P перпендикуляры NM и PQ на радиус OA, пере-

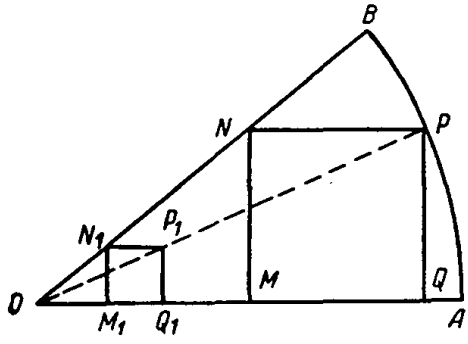

Рис. 70

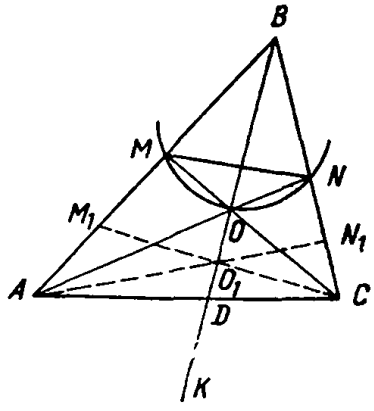

Рис 71

секающие радиус OA в точках M и Q. Четырехугольник $MNPQ$ и будет искомым. Действительно, так как $\triangle ONP \sim \triangle ON_1P_1$ и $\triangle ONM \sim \triangle ON_1M_1$, то $\frac{NP}{N_1P_1} = \frac{ON}{ON_1}$ и $\frac{NM}{N_1M_1} = \frac{ON}{ON_1}$. Отсюда $\frac{NP}{N_1P_1} = \frac{NM}{N_1M_1}$ или (учитывая, что $N_1P_1 = N_1M_1$) $NP = NM$. Итак, фигура $MNPQ$ — квадрат с вершинами, расположенными так, как требуется в задаче Всегда ли возможна задача? Это зависит от возможности построения квадрата $M_1N_1P_1Q_1$. Если $\angle AOB$ тупой, то такой квадрат построить невозможно, в этом случае задача не имеет решения. Когда $\angle AOB$ прямой, задача имеет единственное решение. Если же этот угол острый, то есть два решения: в одном случае две вершины лежат на радиусе OA, а в другом — на радиусе OB.

Пример 287. Построить треугольник, зная один из его углов, направление биссектрисы этого угла и основания двух других биссектрис треугольника на сторонах данного угла.

Решение. Предположим, что искомый $\triangle ABC$ (рис. 71) построен и AN и CM — две его биссектрисы, пересекающиеся в точке O. В этом треугольнике известны $\angle ABC = 2\beta$, биссектриса BK этого угла и точки N и M — основания двух других биссектрис треугольника. Положим $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle BCA = 2\gamma$. Так как $\angle DOC$ есть внешний угол $\triangle OBC$, то $\angle DOC = \beta + \gamma$. Точно так же $\angle AOD = \beta + \alpha$, потому что $\angle AOD$ внешний для $\triangle AOB$. Следовательно, биссектрисы AN и CM образуют

между собой $\angle NOM = \angle AOC = \angle DOC + \angle DOA = (\beta + \gamma) + (\beta + \alpha) = (\alpha + \beta + \gamma) + \beta = 90° + \beta$.

Отсюда заключаем, что точка O пересечения биссектрис треугольника лежит на дуге окружности, проходящей через точки M и N и вмещающей $\angle MON = 90° + \beta$. Из этого анализа вытекает следующий способ построения треугольника. Соединяем данные точки M и N отрезком прямой и строим сегмент с основанием MN, вмещающий угол $90° + \beta$. Находим точку O пересечения дуги построенного сегмента с данной биссектрисой BK угла ABC. Проводим прямые NO и MO и продолжаем их до пересечения со сторонами угла ABC в точках A и C. Соединяем точки A и C отрезком прямой. Таким образом, получаем $\triangle ABC$, который и является искомым. Докажем это. Очевидно, достаточно доказать, что AN и CM — биссектрисы построенного треугольника. Предположим, что это не так. Тогда проведем биссектрисы AN_1 и CM_1 углов BAC и BCA треугольника. Они должны пересечься в некоторой точке O_1, лежащей на третьей биссектрисе BK. Эта точка O_1 может оказаться ближе к AC или дальше от AC, чем точка O. Но ранее было доказано, что угол между биссектрисами двух углов треугольника равен $90° + \beta$, где β — половина третьего угла треугольника. Следовательно, $\angle AO_1C = 90° + \beta$, и так как $\angle AOC = 90° + \beta$, то $\angle AO_1C = \angle AOC$. Но это невозможно, что следует из теоремы о внешнем угле треугольника, согласно которой внешний угол треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных. Очевидно, все эти рассуждения остаются в силе и в том случае, когда точка O_1 будет находиться к AC не ближе, чем точка O (как это изображено на рис. 71), а дальше. Полученное противоречие и доказывает, что AN и CM — биссектрисы $\triangle ABC$.

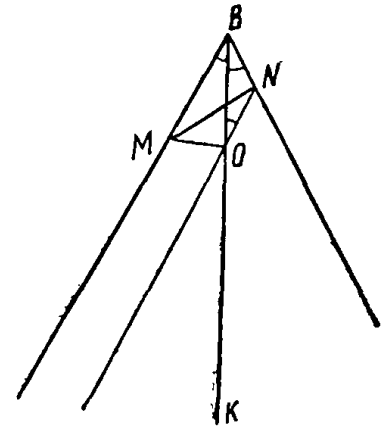

Рис. 72

Остается провести исследование. Так как точка O пересечения дуги сегмента, вмещающего угол $90° + \beta$, с биссектрисой BK всегда существует, то решение невозможно лишь в двух случаях: когда $NO \parallel MB$ (рис. 72) или когда $MO \parallel BN$. В первом случае не найдется вершины A, а во втором — вершины B. Если $NO \parallel MB$, то $\angle BON = \angle OBM = \beta$ и потому $MO \perp OB$, если же $MO \parallel BN$, то должно быть $NO \perp OB$. Во всех других случаях решение существует и притом единственное.

Пример 288. Построить трапецию, зная ее диагонали l и m, угол между ними α и боковую сторону a.

Решение. Предположим, что задача решена и трапеция $ABCD$ (рис. 73) искомая. Проведем $CM \parallel BD$, где M — точка пересечения прямых AD и CM. В результате получим $\triangle ACM$ со сторонами l и m и углом α между ними, причем вершина D трапеции будет находиться от вершины C треугольника на расстоянии a. Отсюда вытекает следующий способ построения трапеции.

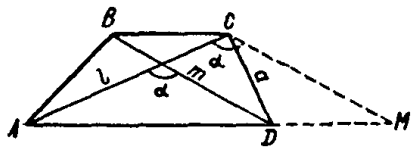

Рис 73

Строим $\triangle ACM$, у которого $AC = l$, $CM = m$, $\angle ACM = \alpha$. Из вершины C треугольника, как из центра, проводим окружность радиуса a и находим точку D пересечения этой окружности с основанием AM треугольника. Затем проводим $CB \parallel MD$ и $DB \parallel MC$, где B — точка пересечения прямых CB и DB. Четырехугольник $ABCD$ и будет искомой трапецией.

Доказательство правильности построения достаточно простое и поэтому не приводится. Возможность решения и число решений зависят от наличия и числа точек D пересечения прямой AM с окружностью радиуса a с центром в точке C.

§ 2. Геометрические задачи в пространстве

78. В этом пункте приведены примеры решения стереометрических задач на вычисление без применения тригонометрии и с применением ее.

Пример 289. Вершины двух равных правильных треугольных пирамид находятся в различных концах их общей высоты, а ребра одной пересекают апофемы другой. Найти объем их общей части, если объем каждой пирамиды равен V.

Решение. Пусть данные пирамиды будут $MABC$ (рис. 74) и $M_1A_1B_1C_1$. Общая часть этих пирамид ограничена частями их боковых граней, следовательно, это будет шестигранник. Две его вершины M и M_1 совпадают с вершинами данных пирамид и находятся в центрах равных правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, а остальные P, Q, R, K, L, T являются точками пересечения ребер одной пирамиды с апофемами другой.

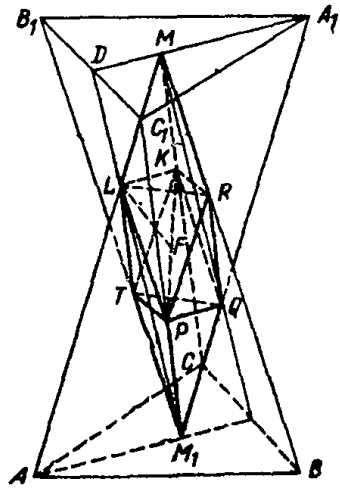

Рис. 74

Проведем плоскость через апофему DM_1 пирамиды $M_1A_1B_1C_1$ и пересекаю-

щуюся с ней высоту A_1D основания этой пирамиды. Построенная плоскость пройдет и через ребро MA пирамиды $MABC$, так как на ней лежат точки M и L, принадлежащие ребру MA. Лежащий в этой плоскости четырехугольник AM_1A_1M — параллелограмм. Действительно, $AM_1 \parallel A_1M$, как линии пересечения этой плоскости с параллельными плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$, и $AM_1 = A_1M$, как радиусы равных правильных треугольников. Отсюда следует, что $LM \parallel A_1M_1$, и так как $DM = \frac{1}{3} A_1D$, потому что M — центр $\triangle A_1B_1C_1$, то и $ML = \frac{1}{3} A_1M_1$, что видно из подобия треугольников MDL и A_1DM_1.

Точно так же убедимся, что отрезки MR и MK каждый тоже равны $\frac{1}{3}$ ребра пирамиды, т. е. $ML = MR = MK = \frac{1}{3} l$, где l — длина бокового ребра данной пирамиды. Теперь легко убедиться, что основание LRK пирамиды $MLRK$ параллельно плоскости треугольника ABC, а высота ее равна $\frac{1}{3}$ высоты h данной пирамиды. Поэтому, пользуясь теоремой о плоских сечениях пирамиды, параллельных ее основанию, можем написать для площадей S_1 и S оснований пирамид $MLRK$ и $MABC$:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1^2}{3^2}, \quad S_1 = \frac{1}{9} S.$$

Следовательно, объем пирамиды $MLRK$ будет

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1 h_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} S \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{27} V.$$

Так же убедимся, что объем пирамиды M_1PQT тоже V_1.

Обратимся теперь к многограннику $PQRKLT$. Он октаэдр и состоит из двух четырехугольных пирамид — $LPRKT$ и $QPRKT$.

Рассмотрим первую из них. Плоскость KLP рассекает ее на две равновеликие треугольные пирамиды $LKPR$ и $LKPT$. Равновеликость их следует из того, что у них общая высота LF и равные основания PRK и PTK (четырехугольник $PRKT$ — параллелограмм, так как $TP = KR = \frac{1}{3} BC$ и $TP \parallel KR$, как линии пересечения плоскости $TPRK$ с параллельными плоскостями TPQ и KRL). Но пирамида $PLRK$ равновелика пирамиде $MLRK$, потому что у них общее основание LRK и одинаковые высоты, равные $\frac{1}{3} h$. Поэтому объем пирамиды $PLRK$, как и пирамиды $LPTK$, равен V_1. Так же убедимся, что четырехугольная пирамида $QPRKT$ состоит из двух треугольных пирамид, объем каждой из которых равен V_1.

Итак, искомый объем

$$V_2 = 6V_1 = 6 \cdot \frac{1}{27} V = \frac{2}{9} V.$$

Заметим, что многогранник, объем которого мы нашли, есть параллелепипед. Все его грани — равные между собой ромбы. Сторона каждого ромба равна $\frac{1}{3}$ бокового ребра данной пирамиды.

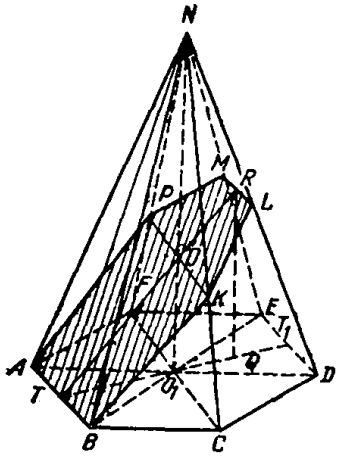

Рис. 75

Пример 290. Через сторону основания правильной шестиугольной пирамиды проведена плоскость, делящая ребра противоположной грани пополам. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если высота пирамиды равна h, а сторона основания a.

Решение. Очевидно, сечение данной пирамиды $NABCDEF$ (рис. 75), площадь которого нужно найти, есть шестиугольник $ABKLMP$. Его сторона ML, как средняя линия $\triangle EDN$, параллельна ED, а так как $AB \parallel ED$, как противоположные стороны правильного шестиугольника, то $ML \parallel AB$. Но и $PK \parallel AB$. Действительно, PK — линия пересечения данного сечения с осевым сечением NCF, а последнее проходит через прямую FC, параллельную прямой AB, лежащей в данном сечении.

Таким образом, шестиугольник состоит из двух трапеций — $PKBA$ и $PKLM$, так что искомая площадь S найдется как сумма площадей этих трапеций.

Проведем плоскость через высоту NO_1 пирамиды и прямую TR, проходящую через середины T и R отрезков AB и ML, и пересекающую отрезок PK в точке O. Эта плоскость перпендикулярна к плоскости основания пирамиды, и потому прямая TT_1 пересечения ее с основанием будет проекцией прямой TR на основание. Так как AB перпендикулярна к проекции TT_1, то по теореме о трех перпендикулярах она перпендикулярна и к наклонной TR.

Следовательно, искомая площадь S может быть записана так:

$$S = \frac{1}{2}(AB + PK)\,OT + \frac{1}{2}(PK + ML)\,OR. \qquad (*)$$

Так как $AB = a$, $ML = \frac{1}{2}a$, то вопрос о вычислении S сводится к вопросу об отыскании отрезков PK, OT и OR. Проведем $RQ \perp TT_1$. Точка R есть середина отрезка ML. Отсюда следует, что $RQ = \frac{1}{2}$, $NO_1 = \frac{1}{2}h$. Замечая еще, что $TO_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$TQ = TO_1 + O_1Q = \frac{1}{2} a\sqrt{3} + \frac{1}{2} O_1T_1 = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$, и пользуясь подобием треугольников TOO_1 и TRQ, получаем: $OO_1 : RQ = TO_1 : TQ$; $OO_1 = \frac{TO_1 \cdot RQ}{TQ} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 4 \cdot h}{2 \cdot 3a\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{h}{3}$.

Теперь можно найти отрезок PK, воспользовавшись подобием треугольников PKN и FCN. Получим: $PK : FC = ON : O_1N$;

$$PK = \frac{ON \cdot FC}{O_1N} = \frac{\left(h - \frac{1}{3}h\right) 2a}{h} = \frac{4}{3} a.$$

Остается определить отрезки OT и OR. Первый найдем из $\triangle OTO_1$. Действительно, на основании теоремы Пифагора будем иметь

$$OT = \sqrt{O_1T^2 + OO_1^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{27a^2 + 4h^2}.$$

Находим OR. Из подобия треугольников OTO_1 и RTQ получим $TR = \frac{3}{2} OT$, а тогда $OR = RT - OT = \frac{1}{2} OT = \frac{1}{12}\sqrt{27a^2 + 4h^2}$.

Подставляя в равенство (*) найденные длины отрезков PK, OT и OR, получаем

$$S = \frac{1}{2}\left(a + \frac{4}{3} a\right) OT + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} a + \frac{a}{2}\right)\frac{1}{2} OT = \frac{13}{8} a \cdot OT =$$

$$= \frac{13}{48} a\sqrt{27a^2 + 4h^2}.$$

Пример 291. В основании пирамиды лежит остроугольный равнобедренный треугольник с углом при основании, равным α, и противоположной ему стороной, равной b. Ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под одинаковыми углами, равными β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ее высоту и вершину угла α.

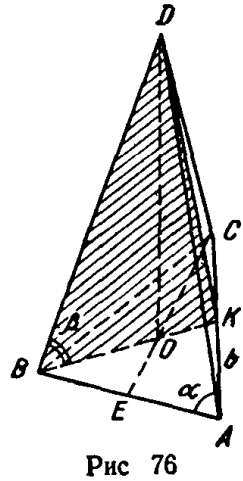

Рис 76

Решение. Пусть $DABC$ (рис. 76) — данная пирамида, DO — ее высота, а DBK (где K — точка на AC) — плоское сечение пирамиды, площадь S которого нужно найти.

Прежде всего заметим, что так как DO — высота пирамиды, то BO есть проекция бокового ребра DB на плоскость основания пирамиды и, следовательно, $\angle KBD = \beta$.

Искомая площадь

$$S = \frac{1}{2} BK \cdot OD = \frac{1}{2} BK \cdot OB \operatorname{tg} \beta.$$

Так как ребра пирамиды одинаково наклонены к основанию, то вершина D проектируется в центр O окружности, описанной около $\triangle ABC$, и OB — радиус этой окружности. Поэтому из $\triangle ABC$ на основании теоремы синусов получим $BO = \frac{b}{2\sin\alpha}$.

Отрезок BK найдется также на основании теоремы синусов, но из $\triangle BKC$. Предварительно подсчитаем, чему равны углы этого треугольника: $\angle BCK = 180° - \angle CAB - \angle CBA = 180° - 2\alpha$, $\angle KBC = \angle BCE = 90° - \alpha$, $\angle BKC = 180° - \angle KBC - \angle BCK = 180° - (90° - \alpha) - (180° - 2\alpha) = 3\alpha - 90°$.

Теперь получим:

$$\frac{BK}{\sin(180° - 2\alpha)} = \frac{BC}{\sin(3\alpha - 90°)}; \quad \frac{BK}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{-\cos 3\alpha}; \quad BK = -\frac{b\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha}.$$

Итак,

$$S = \frac{1}{2} BK \cdot OB \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2 \sin 2\alpha}{4\sin\alpha\cos 3\alpha} \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2 \cos\alpha \operatorname{tg}\beta}{2\cos 3\alpha}.$$

Замечание Появление знака минус в выражении для площади объясняется тем, что 3α является углом второго или третьего квадранта, в то время как углы α и β — острые. На самом деле, $\angle BCK = 180° - 2\alpha$ — острый, т. е $180° - 2\alpha < 90°$, и поэтому $2\alpha > 90°$, $\alpha > 45°$, $3\alpha > 135°$. С другой стороны, $0 < \alpha < 90°$, $0 < 3\alpha < 270°$. Итак, действительно, $135° < 3\alpha < 270°$.

Пример 292. В правильной треугольной пирамиде проведена плоскость через середину бокового ребра перпендикулярно к нему. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если длина бокового ребра пирамиды равна $2a$, а сторона ее основания a.

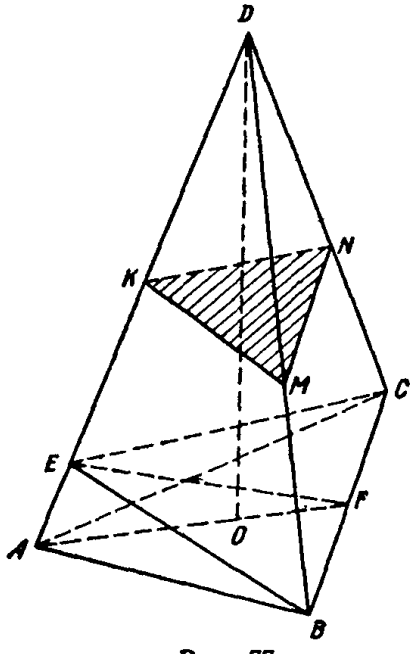

Рис 77

Решение. Пусть K — середина бокового ребра AD данной пирамиды $DABC$, а треугольник KMN, где M и N — точки на ребрах DB и DC, — то сечение пирамиды, площадь S которого нужно найти (рис. 77).

Проведем $BE \perp AD$, где E — точка на ребре AD, и соединим точки E и C отрезком прямой. Получим равные треугольники ABE и ACE, потому что AE — их общая сторона, а $AB = AC$ и $\angle BAE = \angle CAE$ по условию. Отсюда находим, что $\angle CEA = \angle BEA = 90°$. Следовательно, плоскость BEC перпендикуляр-

на AD, а так как и плоскость MKN перпендикулярна AD, то эти плоскости параллельны.

Искомую площадь S найдем, воспользовавшись теоремой о сечениях пирамиды, параллельных основанию, если предварительно вычислим площадь $\triangle BEC$ и длину отрезка DE. Основание треугольника $BC = a$. Чтобы вычислить его площадь, нужно найти высоту треугольника. Проведем эту высоту EF и соединим F и A отрезком прямой. Очевидно, AF — высота $\triangle BAC$ (F — середина BC), и поэтому $AF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Построим высоту DO пирамиды. Прямоугольные треугольники AEF и AOD подобны, так как у них $\angle EAF$ общий. Пользуясь подобием этих треугольников и учитывая, что

$$AO = \frac{2}{3} AF = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}a,$$

получаем:

$$\frac{EF}{DO} = \frac{AE}{AO} = \frac{AF}{AD} \text{ или } EF = \frac{DO \cdot AF}{AD} = \frac{\sqrt{11}a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2a \cdot 2} = \frac{\sqrt{11}}{4}a$$

$$\text{и } AE = \frac{AO \cdot AF}{AD} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}}{3 \cdot 2a \cdot 2} = \frac{a}{4}.$$

Следовательно, площадь S_1 треугольника BEC

$$S_1 = \frac{1}{2} BC \cdot EF = \frac{a^2\sqrt{11}}{8}.$$

Отрезок $DE = AD - AE = 2a - \frac{a}{4} = \frac{7}{4}a$, а $DK = a$. Поэтому на основании теоремы о сечениях пирамиды, параллельных основанию, найдем

$$\frac{S}{S_1} = \frac{KD^2}{DE^2} = \frac{a^2 \cdot 16}{49a^2} = \frac{16}{49}.$$

Отсюда

$$S = \frac{16}{49} S_1 = \frac{16}{49} \cdot \frac{\sqrt{11}}{8} a^2 = \frac{2\sqrt{11}}{49} a^2.$$

Замечание. При построении сечения KMN мы предполагали, что точки M и N лежат на ребрах пирамиды. Покажем, что это единственно возможное расположение их, т. е M и N не могут оказаться на продолжениях боковых ребер или на основании BC. Действительно, $AB = a < 2a = DB$. Поэтому $\angle ADB$ меньше каждого из углов DAB и DBA и, следовательно, он меньше 60°. Но тогда $\angle DMK$ больше 30°, и убеждаемся, что $DM < 2 \cdot KD = 2a = DB$.

Пример 293. Через вершину правильной четырехугольной призмы проведена плоскость так, что в сечении ее с призмой образовался ромб с острым углом α. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания призмы.

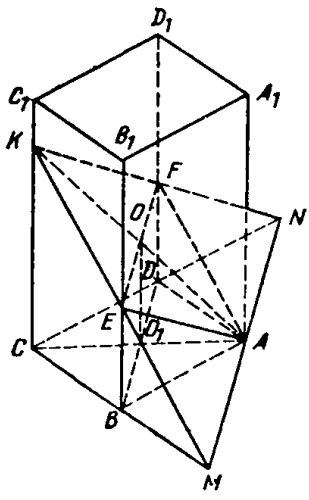

Рис 78

Решение. Пусть сечение данной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 78), о котором речь идет в задаче, есть ромб $AEKF$. Покажем, что $\angle CAK$, заключенный между диагональю CA нижнего основания призмы и диагональю KA ромба, и есть линейный угол искомого двугранного угла. Так как по условию $AE = AF$, $AB = AD$, $\angle ABB_1 = \angle ADD_1 = 90°$, то $\triangle ABE = \triangle ADF$. Отсюда следует, что $BE = DF$, и так как $BE \parallel DF$, то $BEFD$ — параллелограмм, так что $EF \parallel BD$.

Плоскость ромба проходит через прямую EF, параллельную BD. Поэтому линия MN пересечения этой плоскости с плоскостью основания призмы параллельна прямым EF и BD. Но в таком случае $MN \perp CA$, потому что $BD \perp CA$ (BD и CA — диагонали квадрата), и $MN \perp AK$, потому что $EF \perp AK$ (EF и AK — диагонали ромба). Отсюда и следует, что $\angle CAK$ есть линейный угол искомого двугранного угла

Соединим вершину A с центром O ромба и центром O_1 нижнего основания призмы отрезками прямых и положим $AO = y$, $\angle CAK = x$.

Тогда $AO_1 = BO_1 = EO = AO \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = y \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\cos x = \frac{AO_1}{AO} = \frac{y \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{y} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $x = \arccos \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Пример 294. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость под углом φ к основанию и перпендикулярно боковому ребру, противолежащему этой стороне. Известно, что объем той части пирамиды, которая заключена между ее основанием и проведенной плоскостью, равен V. Найти высоту этой пирамиды.

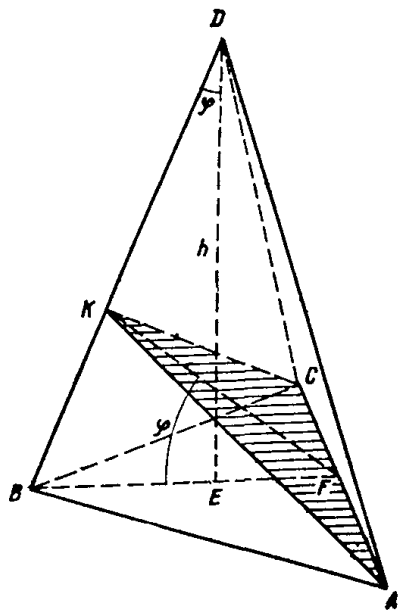

Рис 79

Решение. Пусть KCA (рис. 79)

есть то сечение данной пирамиды $DABC$, о котором говорится в задаче. Построим линейный угол φ данного двугранного угла. Для этого проведем высоту DE пирамиды, которая пересечет плоскость основания в центре E $\triangle ABC$, а затем построим плоскость, проходящую через высоту DE и высоту BF $\triangle ABC$.

Построенная плоскость пересечет плоскость KCA по некоторой прямой KF. Полученный при этом $\angle BFK$ и будет линейный угол φ. Действительно, KF является проекцией BF на плоскость KCA, а так как CA перпендикулярна к наклонной BF, то по теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах, $CA \perp KF$.

Чтобы вычислить высоту $DE = h$, обратимся к $\triangle DBE$. Здесь $\angle BDE = \varphi$, так как он острый и его стороны перпендикулярны сторонам острого $\angle BFK = \varphi$. Если положим $BE = 2x$, то $h = 2x \operatorname{ctg} \varphi$. Высоту h найдем, отыскав величину x. Чтобы найти x, выразим объем V пирамиды $BAKC$ через x. Пользуясь равенством $BE = 2x$, получаем

$$KF = 3x \cos \varphi; \quad AC = AB = \frac{2}{\sqrt{3}} BF = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3x = 2\sqrt{3}x;$$

$$KB = 3x \sin \varphi;$$

$$V = \frac{1}{6} AC \cdot KF \cdot KB = \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 3x \cos \varphi \cdot 3x \sin \varphi =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{3} x^3 \sin 2\varphi.$$

Отсюда

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{3\sqrt{3} \sin 2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{V}{\sin 2\varphi}}; \quad h = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{V}{\sin 2\varphi}} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Пример 295. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса, объем которого в n раз больше объема вписанного в конус шара.

Решение. Пусть ABC (рис. 80) есть осевое сечение данного конуса. Так как центр O вписанного в конус шара лежит на высоте CD конуса, то плоскость ABC рассечет шар по большому кругу. Этот круг вписан в равнобедренный $\triangle ABC$ и, следовательно, касается стороны AB в ее середине D, а центр его находится на пересечении биссектрис треугольника. Положим $\angle CBD = x$, $OD = r$, объем конуса V_1, объем шара V_2.

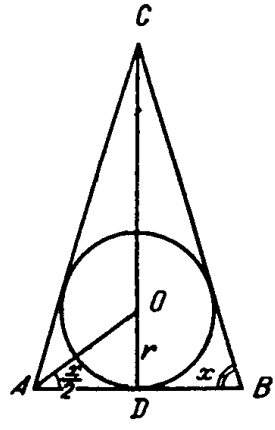

Рис 80

Из треугольников OAD и BDC найдем, что $AD = r \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, $CD = DB \operatorname{tg} x = AD \operatorname{tg} x$.

Поэтому получим $V_1 = \frac{1}{3}\pi AD^2 \cdot CD = \frac{1}{3}\pi \cdot AD^3 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \operatorname{tg} x$. Так как $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$ и по условию $V_1 = nV_2$, то придем к следующему равенству:

$$\frac{\pi}{3} r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \operatorname{tg} x = n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

или

$$\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \operatorname{tg} x = 4n.$$

Решим полученное тригонометрическое уравнение:

$$\operatorname{tg} x = 4n \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2};\ \frac{\sin x}{\cos x} = 4n \cdot \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x},\ \frac{1}{\cos x} = \frac{4n(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2};$$

$$(1+\cos x)^2 = 4n(\cos x - \cos^2 x),\ (4n+1)\cos^2 x -$$

$$-2(2n-1)\cos x + 1 = 0,\ \cos x = \frac{2n-1 \pm \sqrt{(2n-1)^2 - (4n+1)}}{4n+1};$$

$$\cos x = \frac{2n-1 \pm 2\sqrt{n(n-2)}}{4n+1}. \qquad (*)$$

Остается выяснить, при каких n возможно равенство (*). Так как $\sqrt{n(n-2)}$ арифметический и $n > 0$, то должно быть и $n-2 \geqslant 0$, т. е. $n \geqslant 2$. Кроме того, $|\cos x| \leqslant 1$ и по условию $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Это приводит к соотношению $0 < \cos x < 1$.

Если в числителе правой части равенства (*) взять перед радикалом знак плюс, то последнее соотношение выполняется. Действительно, при $n \geqslant 2$ дробь положительна и, кроме того, $2n-1+2\sqrt{n(n-2)} = 2n-1+\sqrt{(2n-1)^2-(4n+1)} < 2n-1+\sqrt{(2n-1)^2} = 4n-2$, т. е. числитель меньше знаменателя. Что касается знака минус перед радикалом, то в этом случае нужно убедиться лишь в положительности числителя или, иначе, в том, что вычитаемое меньше уменьшаемого. Но это видно из того, что $2\sqrt{n(n-2)} = \sqrt{(2n-1)^2-(4n+1)} < \sqrt{(2n-1)^2} = 2n-1$.

Итак,

$$x = \arccos \frac{2n-1 \pm 2\sqrt{n(n-2)}}{4n+1},$$

причем $n \geqslant 2$.

Пример 296. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, а угол между ее смежными боковыми гранями равен φ. Найти радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

Решение. Пусть данная пирамида есть $MABCD$ (рис. 81). Построим линейный угол двугранного угла между соседними боковыми гранями пирамиды. Для этого в плоскости AMC проведем $OK \perp MC$ и построим плоскость DBK, проходящую через диагональ DB основания пирамиды и построенный перпендикуляр OK. Так как OC — проекция MC на плоскость основания пирамиды и $BD \perp AC$ (BD и AC — диагонали квадрата), то по теореме о трех перпендикулярах $DB \perp MC$.

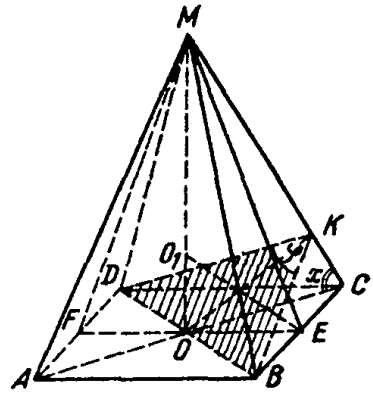

Рис. 81

Таким образом, MC перпендикулярна к двум прямым OK и DB плоскости DBK и, следовательно, по теореме о двух перпендикулярах MC перпендикулярна к плоскости DBK. Но в таком случае $\angle DKB$, действительно, есть линейный угол рассматриваемого двугранного угла, и он равен φ.

Очевидно, шар, вписанный в данную пирамиду, имеет центр O_1 на высоте MO пирамиды, а точки касания его с поверхностью пирамиды находятся на ее апофемах и в центре O основания. Поэтому сечение вписанного шара плоскостью FME, проходящей через апофемы ME и MF данной пирамиды, есть его большой круг, вписанный в $\triangle FME$.

Положим $OE = a$, $OO_1 = r$ и $\angle OEM = \alpha$. Тогда из треугольников O_1OE и MOE найдем:

$$r = O_1O = OE \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{a}.$$

Таким образом, вопрос о вычислении раднуса r сводится к вопросу об отыскании отрезка $OE = a$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Чтобы найти a, обратимся к треугольникам OKC и OKB. Положив $\angle MCO = x$, найдем, что $OK = OC \sin x = OB \sin x$, $OK = OB \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, и потому $\sin x = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. Но $a = OE = \frac{OC}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} h \operatorname{ctg} x =$

$$= \frac{h}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \frac{h}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}}}{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{h\sqrt{-\cos\varphi}}{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Остается найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{a}$, то

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}},\quad \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}+a} = \frac{1}{h}\left(\sqrt{a^2+h^2}-a\right) =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2+1}-\frac{a}{h} = \sqrt{\frac{-\cos\varphi}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}+1}-\frac{\sqrt{-\cos\varphi}}{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{-\cos\varphi+2\cos^2\frac{\varphi}{2}}-\sqrt{-\cos\varphi}}{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{-\cos\varphi+1+\cos\varphi}-\sqrt{-\cos\varphi}}{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{-\cos\varphi}}{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Итак,

$$r = a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h\sqrt{-\cos\varphi}}{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{-\cos\varphi}}{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{h\left(\sqrt{-\cos\varphi}+\cos\varphi\right)}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Замечание. Здесь величина $-\cos\varphi$, находящаяся под знаком квадратного корня, положительна. Чтобы в этом убедиться, обратимся к треугольникам OKB и OCB. Из них находим $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{OB}{OK}$ и $\operatorname{tg}45^\circ = \frac{OB}{OC}$. Но $OK < OC$. Поэтому $\operatorname{tg}45^\circ < \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, $45^\circ < \frac{\varphi}{2} < 90^\circ$, $90^\circ < \varphi < 180^\circ$, $\cos\varphi < 0$, $-\cos\varphi > 0$.

Пример 297. Площадь нижнего основания правильной треугольной усеченной пирамиды в 4 раза больше площади ее верхнего основания. Эта пирамида такова, что в нее можно вписать шар. Найти двугранный угол при ребре основания пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 82) есть данная усеченная пирамида. Поскольку пирамида правильная, то точки касания вписанного в нее шара с ее поверхностью находятся на апофемах пирамиды и в центрах ее оснований, а центр шара O — на высоте KK_1, проходящей через центры K и K_1 оснований пирамиды.

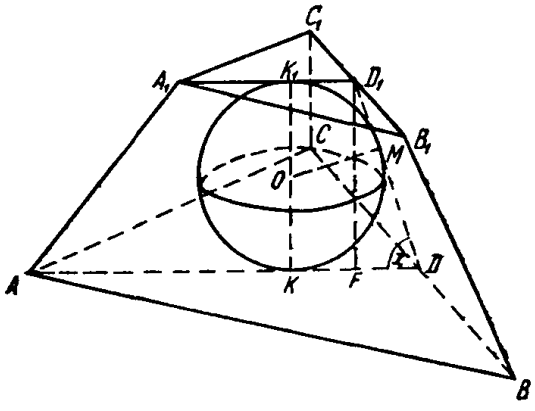

Рис. 82

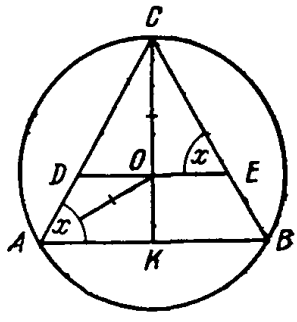

Рис. 83

Проведем плоскость AA_1D_1D через ребро AA_1 и апофему DD_1. Эта плоскость перпендикулярна к ребру BC ($BC \perp AD$ и $BC \perp DD_1$), следовательно, $\angle ADD_1 = x$ есть линейный угол искомого двугранного угла. Так как $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то отношение их площадей S и S_1 равно отношению квадратов радиусов $KD = r$ и $K_1D_1 = r_1$ вписанных в эти треугольники окружностей. Поэтому $\frac{r^2}{r_1^2} = \frac{S}{S_1} = \frac{4}{1}$, $\frac{r}{r_1} = 2$, $r = 2r_1$. Но, как видно из рис. 82, $\cos x = \frac{DF}{DD_1}$, причем $DF = KD - K_1D_1 = r - r_1 = 2r_1 - r_1 = r_1$. Что касается отрезка DD_1, то, обозначив буквой M точку касания шара с апофемой DD_1, получим. $DD_1 = DM + MD_1 = DK + D_1K_1 = r + r_1 = 2r_1 + r_1 = 3r_1$. Итак, $\cos x = \frac{r_1}{3r_1} = \frac{1}{3}$, $x = \arccos\frac{1}{3}$.

Пример 298. Сечение конуса, параллельное его основанию, проходит через центр описанного около конуса шара и делит объем конуса пополам. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

Р е ш е н и е. Рассмотрим осевое сечение CAB (рис. 83) данного конуса, где $\angle BAC = x$ — искомый. Пусть CK — высота сечения, O — центр описанного около конуса шара, а DE — отрезок, по которому данное сечение конуса пересекается с осевым сечением CAB. Положим $OE = y$, объем данного конуса V и объем отсеченного конуса V_1. По условию $V = 2V_1$. Найдем

V_1 и V, выраженные через x и y. Получим: $V_1 = \frac{1}{3}\pi y^3 OC = \frac{1}{3}\pi y^3 \operatorname{tg} x$, $V = \frac{1}{3}\pi AK^3 CK = \frac{1}{3}\pi AK^3 \operatorname{tg} x$, но $\angle AOK = \angle ACO + \angle CAO = 2\angle ACO = 2(90° - x) = 180° - 2x$ и $AK = AO \sin(180° - 2x) = OC \sin 2x = y \operatorname{tg} x \sin 2x = 2y \sin^2 x$, поэтому $V = \frac{1}{3}\pi 8y^3 \sin^6 x \operatorname{tg} x$. Подставляя V и V_1 в равенство $V = 2V_1$, получим: $\frac{8}{3}\pi y^3 \sin^6 x \operatorname{tg} x = \frac{2}{3}\pi y^3 \operatorname{tg} x$, $4\sin^6 x = 1$, $\sin x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $x = \arcsin \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

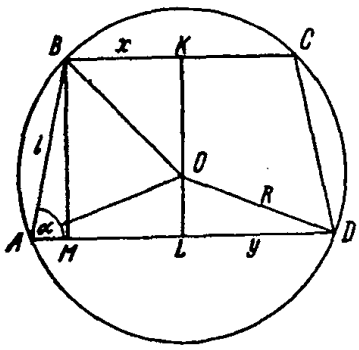

Рис. 84

Пример 299. Образующая усеченного конуса, равная l, наклонена к плоскости большего основания конуса под углом α. Найти радиус шара, описанного около этого конуса, если его боковая поверхность равна S.

Решение. Рассмотрим осевое сечение $ABCD$ (рис. 84) данного усеченного конуса. Предположим, что центр O описанного шара находится внутри конуса. Обозначим диаметр верхнего основания $2x$, а нижнего $2y$. Тогда, соединив середины K и L сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$ отрезком KL и воспользовавшись очевидным равенством $KO + OL = KL$ и теоремой Пифагора, получим следующее уравнение для определения искомого радиуса:

$$\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{R^2 - y^2} = l \sin \alpha.$$

Умножив обе части этого равенства на $\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - y^2}$, получим после несложных преобразований

$$\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - y^2} = \frac{y^2 - x^2}{l \sin \alpha}.$$

Складывая эти равенства, найдем, что

$$2\sqrt{R^2 - x^2} = l \sin \alpha + \frac{y^2 - x^2}{l \sin \alpha}.$$

или

$$R^2 - x^2 = \frac{(l^2 \sin^2 \alpha + y^2 - x^2)^2}{4l^2 \sin^2 \alpha}. \qquad (*)$$

Проведем $BM \perp AD$, где M — точка на прямой AD. Тогда из $\triangle ABM$ получим $y - x = l \cos \alpha$ и, кроме того, по условию $\pi(x + y)l = S$. Отсюда $y^2 - x^2 = \frac{S}{\pi} \cos \alpha$, а $x = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{\pi l} - l \cos \alpha\right)$.

Подставляя найденные x и $y^2 - x^2$ в равенство (*), получим

$$R^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{S}{\pi l} - l\cos\alpha\right)^2 + \frac{(\pi l^2 \sin^2\alpha + S\cos\alpha)^2}{4\pi^2 l^2 \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{(S\sin\alpha - \pi l^2 \cos\alpha \sin\alpha)^2 + (\pi l^2 \sin^2\alpha + S\cos\alpha)^2}{4\pi^2 l^2 \sin^2\alpha} = \frac{S^2 + \pi^2 l^4 \sin^2\alpha}{4\pi^2 l^2 \sin^2\alpha}.$$

Остается только извлечь корень.

Заметим, что тот же результат получим, если центр описанного шара будет находиться не внутри конуса.

Пример 300. Найти радиус шара, описанного около усеченного конуса, в котором радиусы оснований равны R и r, а образующая наклонена к плоскости нижнего основания под углом α.

Решение. На рис. 85 изображены данный усеченный конус $ABCD$ и описанный вокруг него шар. Проведем плоскость через высоту MN конуса, где M и N — центры оснований конуса. Так как центр O шара лежит на высоте MN, то в сечении шара этой плоскостью получится большой круг, а в сечении пирамиды — равнобедренная трапеция $ABCD$, вписанная в окружность этого круга. Все дальнейшие построения будем выполнять в этой плоскости.

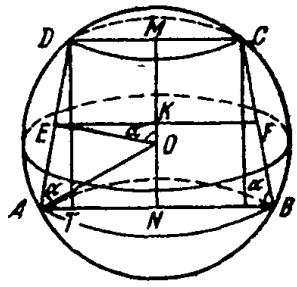

Рис. 85

Проведем из середины E боковой стороны AD трапеции отрезок прямой $EO \perp AD$. Точка O пересечения прямой EO с высотой MN трапеции будет центром описанного круга. Соединим A с O отрезком AO, который и будет искомым радиусом, и положим $AO = x$.

Из прямоугольного треугольника AOE найдем, что $x = OA = \sqrt{AE^2 + OE^2}$. Построив $DT \perp AB$, получим прямоугольный треугольник ADT, из него находим

$$AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\cdot\frac{AT}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}\cdot\frac{AB - DC}{2\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2R - 2r}{2\cos\alpha} = \frac{R - r}{2\cos\alpha}.$$

Остается найти OE. Для этого проведем среднюю линию EF трапеции, которая пересечет высоту MN под прямым углом в некоторой точке K. Так как углы EOK и DAT — острые с взаимно перпендикулярными сторонами, то они равны, и $\angle EOK = \alpha$. Поэтому из $\triangle EOK$ найдем, что

$$OE = \frac{EK}{\sin\alpha} = \frac{EF}{2\sin\alpha} = \frac{AB + DC}{4\sin\alpha} = \frac{2R + 2r}{4\sin\alpha} = \frac{R + r}{2\sin\alpha}.$$

Теперь получим окончательно

$$x = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{\left(\frac{R-r}{2\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{R+r}{2\sin\alpha}\right)^2} = \frac{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}.$$

На рис. 85 центр данного шара расположен внутри конуса. Однако при решении задачи мы на это не опирались, и полученный результат будет верен также и в том случае, если центр шара будет находиться вне конуса или на его основании.

Пример 301. Два одинаковых шара радиуса r касаются друг друга. Три одинаковых шара неизвестного радиуса x касаются обоих шаров радиуса r и друг друга. Найти x.

Решение. Так как расстояние между центрами двух касающихся шаров равно сумме их радиусов, то линии центров шаров образуют многогранник, состоящий из двух равных правильных пирамид. Одна из таких пирамид $O_1C_1C_2C_3$ изображена

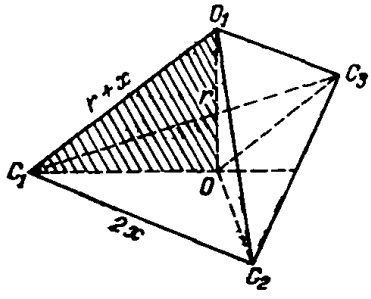

Рис 86

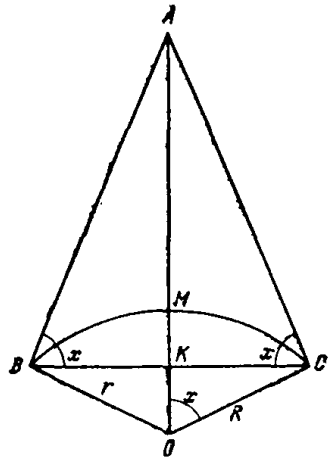

Рис 87

на рис. 86, а другая, не изображенная на нем, имеет вершину O_2 симметричную с O_1 относительно плоскости основания пирамиды, и то же основание $C_1C_2C_3$. Вершины C_1, C_2, C_3 являются центрами шаров радиуса x.

Следовательно, $C_1C_2 = 2x$. Точки O_1 и O_2 — центры шаров радиуса r. Поэтому боковое ребро изображенной пирамиды равно $r + x$, а высота r. Так как $OC_1 \cdot \sqrt{3} = 2x$, $OC_1 = \frac{2x}{\sqrt{3}}$, то из прямоугольного треугольника OO_1C_1 получим: $(r+x)^2 = r^2 + \left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2$, $r^2 + 2rx + x^2 = r^2 + \frac{4}{3}x^2$, $\frac{1}{3}x^2 = 2rx$, $x^2 = 6rx$, $x = 6r$.

Пример 302. Шаровой сегмент, меньший полушара, и конус имеют общее основание. Боковая поверхность конуса в два раза больше сегментной поверхности. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости его основания, если сегментная и коническая поверхности касаются друг друга.

Решение. Пусть равнобедренный треугольник ABC (рис. 87) есть осевое сечение данного конуса. Центр O сегментной поверхности находится на продолжении высоты AK конуса, и в сечении сегмента с осевым сечением конуса получается круговой сегмент BCM с высотой MK и того же радиуса, что и радиус сегментной поверхности.

Пусть $BK = r$, $OC = R$, боковая поверхность конуса S_1, сегментная поверхность S_2, искомый $\angle ABC = x$. Заметив, что $\angle AOC = x$ ($AO \perp BC$ и $OC \perp AC$), можем написать: $S_1 = \pi r \cdot AB = \frac{\pi r^2}{\cos x}$, $S_2 = 2\pi R \cdot MK = 2\pi R(OM - OK) = 2\pi R(R - R\cos x) = 2\pi R^2(1 - \cos x) = 2\pi\left(\frac{r}{\sin x}\right)^2(1 - \cos x) = 2\pi r^2 \cdot \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = 2\pi r^2 \cdot \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} = 2\pi r^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$. Но $S_1 = 2S_2$.

Поэтому $\frac{\pi r^2}{\cos x} = \frac{4\pi r^2}{1 + \cos x}$, $\frac{1}{\cos x} = \frac{4}{1 + \cos x}$, $1 + \cos x = 4\cos x$, $3\cos x = 1$, $\cos x = \frac{1}{3}$, $x = \arccos\frac{1}{3}$.

Пример 303. Ребро правильного тетраэдра равно a. Найти радиус шара, поверхность которого касается всех ребер тетраэдра.

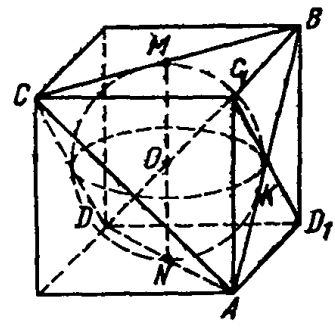

Рис 88

Решение. Пусть $ABCD$ (рис. 88) — данный тетраэдр. Проведем через ребро AB плоскость, параллельную противоположному ребру CD. Такая плоскость будет единственная, и ее можно построить так: взять точку K на AB, провести прямую $C_1D_1 \parallel CD$, тогда плоскость, проходящая через AB и C_1D_1, будет требуемой. Затем таким же способом построим плоскость, проходящую через ребро CD и параллельную противоположному ребру AB. Эти две плоскости будут параллельны. Построив для каждой пары противоположных ребер тетраэдра параллельные плоскости, получим многогранник, который, очевидно, является кубом с диагональю грани, равной a. Шар, касающийся ребер тетраэдра, окажется вписанным в построенный куб, причем его диаметр будет равен ребру куба. Обозначим точки касания шара с основаниями куба M и N. Тогда искомый радиус $R = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Пример 304. Около куба описан цилиндр так, что концы диагонали куба находятся в центрах оснований цилиндра, а его остальные вершины — на боковой поверхности цилиндра Найти полную поверхность цилиндра, если площадь диагонального сечения куба равна S.

Решение. Пусть данный куб и описанный около него цилиндр выглядят так, как это изображено на рис. 89. Найдем радиус $AB = r$ цилиндра и его высоту $O_1O_2 = h$. Положим $O_1A = x$. Получим:

$$S = AO_1 \cdot AO_2 = x \cdot x\sqrt{2} = x^2\sqrt{2}, \quad x^2 = \frac{S}{\sqrt{2}},$$

$$h^2 = AO_1^2 + AO_2^2 = x^2 + 2x^2 = 3x^2 = \frac{3S}{\sqrt{2}}, \quad hr = S,$$

$$r^2 = \frac{S^2}{h^2} = \frac{S\sqrt{2}}{3}.$$

Поэтому искомая поверхность $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi(r^2 + rh) =$

$= 2\pi\left(\frac{S\sqrt{2}}{3} + S\right) = \frac{2}{3}\pi S(\sqrt{2} + 3)$.

Пример 305. Шаровая поверхность касается трех ребер куба, сходящихся в одной вершине, и трех его граней, пересекаю-

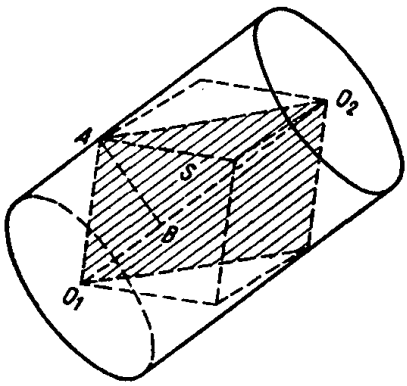

Рис. 89

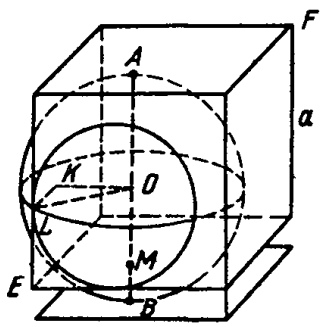

Рис 90

щихся в вершине, противоположной предыдущей. Найти часть поверхности этой сферы, лежащей вне куба, если ребро куба равно a.

Решение. Искомая поверхность S состоит из трех равных сегментных поверхностей. На рис. 90 эти поверхности расположены впереди куба, ниже его и левее. Шаровая поверхность с центром в точке O касается ребер, сходящихся в вершине E, и граней, пересекающихся в вершине F.

Проведем из точки A касания шаровой поверхности с верхним основанием куба диаметр AB и пусть M — точка пересечения AB с нижним основанием. Если положить радиус сферы, равным r, и воспользоваться формулой сегментной поверхности, то получим

$$S = 3 \cdot 2\pi r \cdot MB = 6\pi r \cdot MB = 6\pi r(AB - AM) = 6\pi r(2r - a).$$

Для отыскания r обратимся к $\triangle OKL$, где L — точка касания сферы с боковым ребром, а K — основание перпендикуляра OK,

опущенного из O на боковую грань, проходящую через это ребро. Из него найдем $OL = OK\sqrt{2}$, и так как $OL = r$, а $OK = OM = AM - OA = a - r$, то $r = (a - r)\sqrt{2}$, $r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = a(2 - \sqrt{2})$. Поэтому $S = 6\pi r(2r - a) = 6\pi a^2(2 - \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 6\pi a^2(10 - 7\sqrt{2})$.

79. Рассмотрим несколько задач на доказательство, на отыскание геометрических мест и на построение.

При решении задач на построение в пространстве предполагается следующее. 1) плоскость дана и может быть построена, если даны элементы, определяющие ее (три точки, прямая и точка вне ее и т. д.); 2) прямая линия дана и может быть построена, если даны две плоскости, пересекающиеся по этой прямой; 3) все построения в плоскости, которые выполнялись в планиметрии, могут быть выполнены, если плоскость дана. Построение в пространстве сводится к конечному числу перечисленных построений.

Пример 306. Доказать, что плоскость, проходящая через концы трех ребер параллелепипеда, сходящихся в одной вершине, делит диагональ параллелепипеда, исходящую из той же вершины, в отношении 1:2.

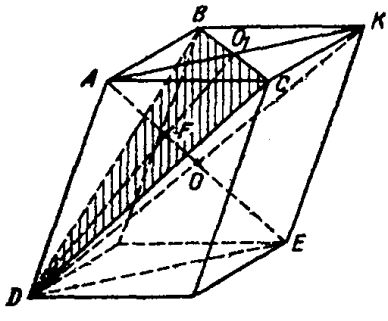

Рис 91

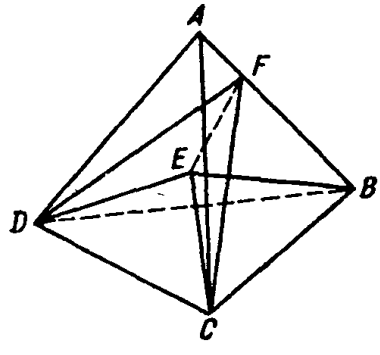

Рис 92

Доказательство. Пусть плоскость BCD (рис. 91) проходит через концы B, C и D ребер AB, AC и AD параллелепипеда, сходящихся в вершине A, и AE — его диагональ, пересекающая плоскость BCD в точке F. Требуется доказать, что $AF : FE = 1 : 2$ или $AF = \frac{1}{3}AE$. Для доказательства проведем плоскость $DAKE$, которая пересечет верхнее основание по диагонали AK и, следовательно, пройдет через середину O_1 диагонали BC, а также пройдет через диагонали AE и DK, пересекающиеся в точке O. Рассмотрим в этой плоскости $\triangle ADK$.

Отрезки прямых DO_1 и OA являются его медианами, и точка их пересечения F разделит отрезок AO так, что

$$AF = \frac{2}{3} AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AE = \frac{1}{3} AE.$$

Пример 307. Вершина одной треугольной пирамиды находится внутри другой треугольной пирамиды, а основания у них совпадают. Доказать, что сумма всех плоских углов при вершине первой пирамиды больше суммы всех плоских углов при вершине второй.

Доказательство. Пусть вершина E (рис. 92) пирамиды $EBCD$ находится внутри пирамиды $ABCD$. Требуется доказать, что сумма S трех плоских углов при вершине E больше суммы S_1 трех плоских углов при вершине A.

Докажем сперва, что $\angle DCE + \angle BCE < \angle DCA + \angle BCA$. Для этого продолжим плоскость DCE до пересечения с ребром AB внешней пирамиды в точке F. Так как в трехгранном угле плоский угол меньше суммы двух других, то из трехгранных углов $CEFB$ и $CDAF$ получим

$$\angle DCE + \angle BCE < \angle DCE + (\angle BCF + \angle FCE) =$$
$$= (\angle DCE + \angle FCE) + \angle BCF = \angle DCF +$$
$$+ \angle BCF < (\angle DCA + \angle ACF) + \angle BCF = \angle DCA +$$
$$+ (\angle ACF + \angle BCF) = \angle DCA + \angle BCA.$$

Точно так же можно показать, что сумма двух плоских углов внутренней пирамиды при вершине B меньше суммы соответствующих двух плоских углов внешней пирамиды при той же вершине. Очевидно, подобное соотношение верно и для пар плоских углов пирамид при вершине C. Обозначим сумму всех плоских углов при вершинах B, C и D внутренней пирамиды без углов основания буквой σ и аналогичную сумму для внешней пирамиды буквой σ_1. Так как $S = 540° - \sigma$, $S_1 = 540° - \sigma_1$ и $\sigma < \sigma_1$, то $S - S_1 = \sigma_1 - \sigma > 0$, откуда $S > S_1$.

Пример 308. Доказать, что не существует многогранника с нечетным числом граней, все грани которого являются многоугольниками с нечетным числом сторон.

Доказательство. Пусть многогранник имеет l ребер и m граней, причем число сторон в гранях $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Так как каждое ребро является общей стороной двух смежных граней, то ребер у многогранника в два раза меньше числа всех сторон всех его граней, т. е.

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = 2l.$$

Но это равенство невозможно, если все числа $n_1, n_2, \ldots, n_m$ будут нечетными и число их нечетное, так как тогда сумма таких чисел даст нечетное число, в то время как $2l$ — четное.

Пример 309. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников, две вершины которых находятся в данных точках A и B, а третьи — на данной прямой, проходящей через данную точку C.

Решение. 1. Пусть M (рис. 93) — любая точка рассматриваемого геометрического места, т. е. точка, являющаяся центром тяжести изменяемого треугольника в некотором его положении ABK. Построим $\triangle ABC$, проведем медиану CD и найдем его центр тяжести N. Соединим точки D и K прямой, а также проведем прямую MN. Последняя проходит через неподвижную точку N параллельно данной прямой CK. Итак, оказывается, что точка M лежит на прямой NL, проходящей через центр тяжести N неподвижного $\triangle ABC$ параллельно данной прямой.

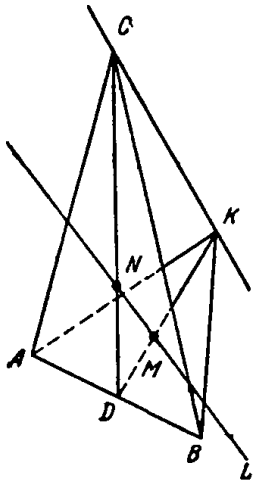

Рис 93

2. Возьмем любую точку M на прямой NL. Проведем плоскость через точки A, B и M, и пусть K есть точка пересечения этой плоскости с данной прямой. Тем самым определится $\triangle AKB$ с медианой KD. Точка M лежит на KD, причем из подобия треугольников KCD и MND следует, что $\frac{MD}{DK} = \frac{ND}{DC} = \frac{1}{3}$ или $MD = \frac{1}{3} DK$. Это значит, что точка M есть центр тяжести $\triangle AKB$.

Итак, искомое геометрическое место есть прямая NL, параллельная данной прямой и проходящая через центр тяжести N треугольника ACB.

Пример 310. Из данной точки A пространства опускаются перпендикуляры AM на всевозможные прямые, проходящие через данную точку B и лежащие в данной плоскости P. Найти геометрическое место точек M.

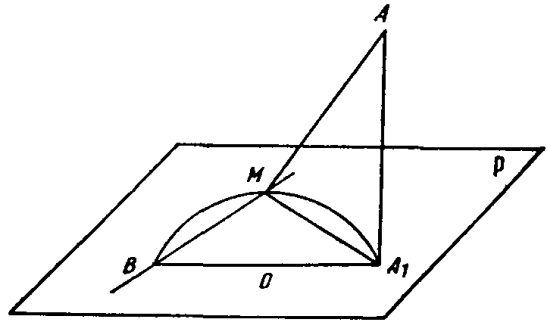

Рис 94

Решение. 1. Пусть M (рис. 94) — любая точка рассматриваемого геометрического места. Опустим из данной точки A перпендикуляр на данную плоскость P и его основание A_1 соединим с точкой M и данной точкой B. Получим прямоугольный треугольник BMA_1, если точка M не совпадет ни с B, ни с A_1. Действительно, наклонная AM к плоскости P перпендикулярна к прямой BM,

но тогда BM перпендикулярна и к проекции MA_1 наклонной AM на эту плоскость. Это значит, что точка M лежит на окружности с центром в середине O отрезка A_1B, где A_1 — проекция точки A на плоскости P, и радиусом, равным $\frac{1}{2}A_1B$. Очевидно, точки A_1 и B этой окружности также принадлежат искомому геометрическому месту.

2. Возьмем на построенной окружности любую точку M. Соединив ее с точками A_1, B и A, получим, что $BM \perp MA_1$, а так как MA_1 — проекция MA на плоскость P, то по теореме о трех перпендикулярах $BM \perp MA$, так что точка принадлежит рассматриваемому геометрическому месту.

Итак, искомое геометрическое место есть окружность радиуса $\frac{1}{2}A_1B$ с центром в точке O.

Пример 311. Построить параллелепипед, три ребра которого лежат на трех данных прямых, попарно не лежащих в одной плоскости.

Решение. Пусть даны прямые AB, CD и EF (рис. 95). Через точку M прямой AB проведем прямую $MN \parallel CD$. Через пересекающиеся прямые AB и MN проведем плоскость R, которая будет параллельна прямой CD. Через точку P прямой CD проведем прямую $PQ \parallel AB$ и через прямые CD и PQ — плоскость S,

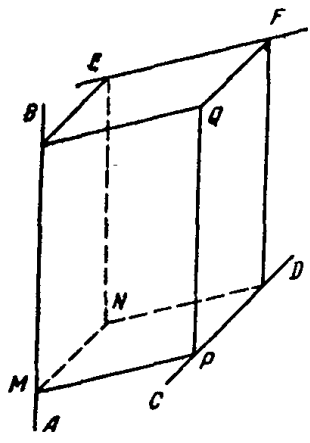

Рис 95

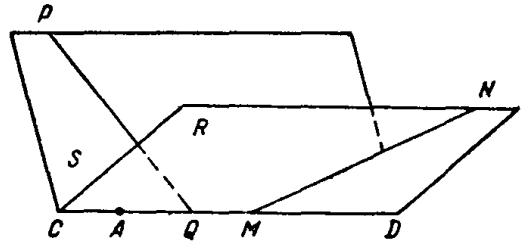

Рис 96

которая будет параллельна пересекающимся прямым AB и MN плоскости R, а следовательно, и самой плоскости R. Точно так же построим пару параллельных плоскостей, проходящих через прямые AB и EF, и пару плоскостей — через CD и EF. Каждые две параллельные плоскости пересекаются с каждыми двумя другими параллельными плоскостями по параллельным прямым, так что эти шесть плоскостей образуют параллелепипед с ребрами, лежащими на прямых AB, CD и EF. Решение всегда возможно и единственно.

Пример 312. Построить прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые и проходящую через данную точку, не лежащую на этих прямых

Решение. Проведем через данную точку A (рис. 96) и данную прямую MN плоскость R и через ту же точку и другую данную прямую PQ — плоскость S. Плоскости R и S, имеющие общую точку A, пересекутся по некоторой прямой, которую обозначим CD. Прямые MN и CD лежат в одной плоскости R и поэтому должны быть или параллельными, или пересекающимися. Предположим, что MN и CD пересекаются, равно как и прямые PQ и CD. Тогда прямая CD и будет искомая. В этом случае решение единственное. Если MN (или PQ) параллельна CD, то задача не имеет решения. Обе прямые MN и PQ не могут быть параллельны CD одновременно (почему?).

Упражнения

295. Дан прямоугольный сектор AOB радиуса R. Параллельно его хорде AB на расстоянии m от нее проведена секущая, пересекающая продолженные радиусы OA и OB в точках C и D, а дугу сектора — в точках E и F. Из точки E, ближайшей к C, восставлен к CD перпендикуляр EM, пересекающий OA в точке M. Показать, что длина отрезка DM не зависит от m, и найти длину этого отрезка.

296. По медианам m_a, m_b, m_c треугольника найти его стороны a, b, c.

297. В трапеции, основания которой a и b, проведена через точку пересечения диагоналей прямая, параллельная основаниям. Найти ее длину.

298. Три окружности радиусов a, b и c касаются друг друга попарно снаружи. Найти длину хорды, отсекаемой третьей окружностью от общей внутренней касательной первых двух окружностей.

299. Прямоугольный сектор радиуса R разделен на две части дугой круга того же радиуса с центром в конце дуги сектора. Определить радиус круга, вписанного в меньшую из этих частей.

300. В треугольник со сторонами a, b и c вписан круг. Точки касания его со сторонами данного треугольника соединены прямыми, и таким образом получился новый треугольник, стороны которого требуется определить.

301. Равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен a, повернут около вершины прямого угла на 30° по отношению к своему первоначальному положению. Найти площадь, общую для обоих положений прямоугольного треугольника.

302. Найти радиус вписанного в прямоугольный треугольник круга, если даны радиус R описанного около этого треугольника круга и площадь треугольника S.

303. Площадь $\triangle ABC$ равна S_1; площадь $\triangle AHB$, где H — точка пересечения высот, равна S_2. Найти площадь прямоугольного $\triangle ABL$, предполагая, что точка L лежит на отрезке CH или его продолжении.

304. Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом α.

305. На диаметре полукруга радиуса R, как на стороне, построен правильный треугольник. Вычислить площадь части его вне полукруга.

306. Сторона правильного треугольника равна a. Из центра его радиусом $\frac{a}{3}$ описана окружность. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

307. В круг радиуса R вписано три равных круга, касающихся друг друга. Вычислить площадь криволинейной фигуры, ограниченной этими кругами.

308. На отрезке AB и двух его неравных частях AC и BC, как на диаметрах, построены полуокружности в одну сторону. По радиусам r_1 и r_2

меньших полуокружностей найти площадь фигуры, ограниченной этими тремя полуокружностями

309. В равнобедренный треугольник вписаны один над другим два круга радиусов R и r, касающиеся друг друга Найти углы при основании треугольника.

Доказать теоремы (310 — 314):

310. Если биссектриса угла треугольника является одновременно медианой, то треугольник равнобедренный

311. Если из точки, отстоящей от прямой на расстоянии a, проведены к этой прямой две наклонные с проекциями на нее, равными $2a$ и $3a$, то сумма углов этих наклонных со своими проекциями равна 45°.

312. Точка пересечения высот треугольника лежит ближе всего к той вершине треугольника, которая расположена против наибольшей стороны.

313. Прямые, соединяющие вершину параллелограмма с серединами сторон, сходящихся в противоположной вершине, рассекают диагональ, соединяющую две другие вершины, на три равные части

314. Диаметры окружностей, каждая из которых проходит через точку пересечения высот треугольника и через две его вершины, равны между собой.

315. Будет ли описанный равносторонний многоугольник правильным?

316. Будет ли вписанный равносторонний многоугольник правильным?

317. Одна окружность касается прямой в точке A Другая касается той же прямой в точке B и первой окружности в точке M. Найти геометрическое место точек M

318. Найти геометрическое место точек, из которых касательные, проведенные к двум данным окружностям, равны

319. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных концентрических окружностей

320. Построить треугольник по его стороне a, противолежащему ей углу A и высоте h_b, опущенной на другую сторону.

321. Построить окружность, касающуюся данной прямой в данной точке и касающуюся другой данной прямой

322. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касательную к данной окружности

323. Построить треугольник по его углу A, высоте h_a и биссектрисе β_a

324. Каждый плоский угол при вершине параллелепипеда равен 45° Длины ребер, сходящихся в одной вершине, равны a, b и c. Вычислить объем параллелепипеда

325. Через середину высоты правильной треугольной пирамиды параллельно ее боковой грани проведена плоскость Найти площадь получившегося сечения, если площадь боковой грани пирамиды равна S

326. Основанием правильной пирамиды служит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна 540°. Сумма апофемы этого многоугольника и апофемы пирамиды равна m Плоскости боковых граней пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом α Определить боковую поверхность пирамиды

327. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен V. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α Определить полную поверхность пирамиды

328. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, в которой даны сторона основания a и двугранный угол между боковыми гранями α.

329. Трапеция с бо́льшим основанием a и острым углом α служит основанием пирамиды, у которой грань, проходящая через сторону a, перпендикулярна к плоскости основания, а все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ Найти объем пирамиды

330. Плоскость, параллельная основанию конуса, объем которого равен V, делит его боковую поверхность пополам Угол при вершине осевого сечения

конуса, противолежащий основанию конуса, равен α. Определить полную поверхность образовавшегося при этом усеченного конуса

331. Образующая конуса равна l и угол при вершине осевого сечения равен α. На каком расстоянии от вершины, считая по образующей, надо рассечь конус плоскостью, параллельной основанию, чтобы полная поверхность конуса разделилась на две равные части?

332. Из вершины конуса, как из центра, описана внутри него сферическая поверхность, касательная к основанию конуса. Определить угол при вершине в осевом сечении этого конуса, если указанная поверхность делит его объем пополам.

333. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен α. Найти сторону основания пирамиды.

334. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину m каждая. Соответствующие им боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой угол α; угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания также равен α. Определить радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

335. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен α, а радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен R. Найти полную поверхность пирамиды.

336. Через каждые три вершины куба с ребром a, лежащие в концах каждых трех ребер, сходящихся в одной вершине, проведена плоскость. Найти объем тела, ограниченного этими плоскостями.

337. Доказать, что в правильном тетраэдре сумма расстояний любой внутренней точки до всех его четырех граней есть величина постоянная.

338. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из данной точки на всевозможные плоскости, пересекающиеся по параллельным прямым, лежат в одной плоскости.

339. Доказать, что если плоскость, проведенная через концы трех ребер параллелепипеда, исходящих из одной вершины, отсекает от параллелепипеда правильный тетраэдр, то параллелепипед можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.

340. Доказать, что правильный тетраэдр можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится квадрат.

341. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных точек.

342. Найти геометрическое место точек, из которых можно провести к данной сфере три касательные, попарно взаимно перпендикулярные.

343. Провести прямую, лежащую в данной плоскости, проходящую через данную точку этой плоскости и перпендикулярную данной прямой.

Глава VIII

Разные вопросы

§ 1. Арифметическая и геометрическая прогрессии

80. Арифметической прогрессией называется такая последовательность чисел, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. Это постоянное число называется разностью прогрессии, а числа, составляющие прогрессию, называются ее членами.

Таким образом, если $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ есть арифметическая прогрессия, то по определению $a_{k+1} = a_k + d$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, а d — разность прогрессии.

Всякий член арифметической прогрессии выражается формулой $a_k = a_1 + (k-1)\,d$. Сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулами:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}; \quad S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)\,d]\,n}{2}.$$

Геометрической прогрессией называется такая последовательность чисел, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, умноженному на одио и то же число, постоянное для этой последовательности. Это постоянное число называется знаменателем прогрессии, а числа, составляющие прогрессию, называются ее членами.

Таким образом, если последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ есть геометрическая прогрессия, то по определению $a_{k+1} = a_k q$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, а q — знаменатель прогрессии.

Всякий член геометрической прогрессии выражается формулой $a_k = a_1 q^{k-1}$. Сумма n первых членов геометрической прогрессии выражается формулами:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}; \quad S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

Если члены арифметической или геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяют соотношениям $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ $(a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots)$, то прогрессия называется возрастающей (убывающей).

Понятие возрастающей (убывающей) прогрессии относится к прогрессиям с вещественными членами. Все остальное, сказаиное здесь, верно для любых комплексных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Пример 313. Могут ли числа 1, $\sqrt{2}$, 2 быть членами арифметической прогрессии?

Решение. Допустим, что $1 = a_m$, $\sqrt{2} = a_n$, $2 = a_p$, где a_m, a_n, a_p — члены какой-то арифметической прогрессии. Тогда $\sqrt{2} = 1 + (n-m)d$, а $2 = 1 + (p-m)d$, где d — разность прогрессии. Отсюда $d = \frac{\sqrt{2}-1}{n-m} = \frac{2-1}{p-m}$ или $\frac{n-m}{p-m} = \sqrt{2}-1$, что невозможно, так как справа число иррациональное, а слева рациональное. Следовательно, эти числа не могут быть членами арифметической прогрессии.

Пример 314. Могут ли числа 1, 7, 18 быть членами геометрической прогрессии?

Решение. Не могут. Действительно, если бы они были членами геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, например $1 = a_m$, $7 = a_n$, $18 = a_p$, то тогда было бы $7 = 1 \cdot q^{n-m}$, $18 = 1 \cdot q^{p-m}$ или $7^{p-m} = q^{(n-m)(p-m)}$, $18^{n-m} = q^{(p-m)(n-m)}$, откуда $7^{p-m} = 18^{n-m}$, что невозможно. На самом деле, считая $m < n < p$, видим, что правая часть равенства имеет множителем число 2, а левая не имеет такого множителя.

Пример 315. Доказать, что три последовательных члена a_{k-1}, a_k, a_{k+1} арифметической прогрессии связаны зависимостью $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$.

Решение. $a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1}$, $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$.

Пример 316. Доказать, что три последовательных члена a_{k-1}, a_k, a_{k+1} геометрической прогрессии связаны зависимостью $|a_k| = \sqrt{a_{k-1}a_{k+1}}$.

Решение. $a_{k+1} : a_k = a_k : a_{k-1}$, $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, $|a_k| = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$.

Пример 317. Доказать, что члены арифметической прогрессии a_m, a_n, a_k, a_l связаны равенством $a_m + a_n = a_k + a_l$, если $m + n = k + l$.

Решение. $a_m + a_n = a_1 + d(m-1) + a_1 + d(n-1) = 2a_1 + (m+n-2)d = 2a_1 + (k+l-2)d = a_1 + (k-1)d + a_1 + (l-1)d = a_k + a_l$.

Пример 318. Доказать, что члены геометрической прогрессии a_m, a_n, a_k, a_l связаны равенством $a_m a_n = a_k a_l$, если $m + n = k + l$.

Решение. $a_m a_n = a_1 q^{m-1} a_1 q^{n-1} = a_1^2 q^{m+n-2} = a_1^2 q^{k+l-2} = a_1 q^{k-1} a_1 q^{l-1} = a_k a_l$.

Пример 319. Найти сумму первых 13 членов арифметической прогрессии, зная, что сумма первых 6 членов этой прогрессии, стоящих на четных местах, равна 90.

Решение. Первый член, стоящий на четном месте, есть a_2, а шестой a_{12}. Поэтому $\frac{(a_2+a_{12})\,6}{2}=90$, $a_2+a_{12}=30$. Но $a_1+a_{13}=a_2+a_{12}=30$. Отсюда $S_{13}=\frac{30\cdot 13}{2}=195$.

Пример 320. Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма S_n любого числа n первых членов в пять раз больше квадрата числа взятых членов.

Решение. По условию $S_n=5n^2$ Но $S_1=a_1$ и $S_2=a_1+a_2$. Поэтому $a_1=5\cdot 1^2=5$, $a_2+a_1=5\cdot 2^2=20$. Отсюда $a_1=5$, $a_2=20-a_1=15$, $d=15-5=10$, и искомая прогрессия будет: 5, 15, 25, 35, ...

Пример 321. Найти сумму всех несократимых дробей со знаменателем 3, содержащихся между целыми числами m и n $(m<n)$.

Решение. Дроби, сумму S которых нужно найти, находятся среди следующих: $m=\frac{3m}{3}$, $\frac{3m+1}{3}$, $\frac{3m+2}{3}$, ..., $\frac{3n-1}{3}$, $\frac{3n}{3}=n$. Эта последовательность есть конечная арифметическая прогрессия с первым членом m и разностью $d=\frac{1}{3}$. Число k ее членов найдем из равенства $n=m+\frac{1}{3}(k-1)$, откуда $k=3n-3m+1$. Следовательно, сумма этих дробей $S_1=\frac{(m+n)(3n-3m+1)}{2}$. Но в сумму S_1 вошли также сократимые дроби $\frac{3m}{3}$, $\frac{3m+3}{3}$, ..., $\frac{3n-3}{3}$, $\frac{3n}{3}$. Иначе их можно записать так: m, $m+1$, ..., $n-1$, n, и их сумма $S_2=\frac{(m+n)(n-m+1)}{2}$. Поэтому искомая сумма будет $S=S_1-S_2=\frac{(n+m)(3n-3m+1)}{2}-\frac{(n+m)(n-m+1)}{2}=n^2-m^2$.

Пример 322. Некоторые члены арифметических прогрессий 17, 21, 25, 29, ... и 16, 21, 26, 31, ... одинаковы. Найти сумму первых ста одинаковых членов этих прогрессий.

Решение. Общий член первой прогрессии $a_n=17+4(n-1)=4n+13$. Общий член второй прогрессии $b_m=16+5(m-1)=5m+11$. Одинаковыми будут те члены, для которых $4n+13=5m+11$ или $n=m+\frac{m-2}{4}$. Чтобы n было целым, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{m-2}{4}=k$ было целым. Отсюда $m=4k+2$, $b_m=5(4k+2)+11=20k+21$, где $k=0, 1, \ldots, 99$. Первое такое число 21, а сотое 2001. Сумма ста чисел $S=\frac{(21+2001)\,100}{2}=101\,100$.

Пример 323. Найти геометрическую прогрессию с вещественными членами, если сумма первых трех членов ее равна 7, а произведение их 8.

Решение. $a_1+a_2+a_3=7$, $a_1a_2a_3=8$. Но $a_2^2=a_1a_3$, поэтому $a_2^3=8$, $a_2=2$. Остается решить систему $a_1+a_3=5$, $a_1a_3=4$. В результате найдем две прогрессии: 1, 2, 4, 8, ... и 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, ...

Пример 324. В геометрической прогрессии, состоящей из семи вещественных членов, сумма первых трех членов равна 0,875, а последних трех 14. Найти эту прогрессию.

Решение. По условию $a_1+a_1q+a_1q^2=0{,}875$ и $a_1q^4+a_1q^5+a_1q^6=14$. Разделив второе равенство на первое, получим: $q^4=16$, $q_1=2$, $q_2=-2$. Подставляя q_1 и q_2 в первое уравнение, найдем: $a_1=\frac{1}{8}$ и $a_1=\frac{7}{24}$. Итак, возможны две прогрессии: $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 и $\frac{7}{24}$, $-\frac{7}{12}$, $\frac{7}{6}$, $-\frac{7}{3}$, $\frac{14}{3}$, $-\frac{28}{3}$, $\frac{56}{3}$.

Замечание. В двух последних задачах члены прогрессий предполагались вещественными. Если бы этого предположения не было, то в первой задаче (323) пришлось бы учитывать все корни уравнения $a_2^3=8$, а их три $a_2=2$; $-1+i\sqrt{3}$; $-1-i\sqrt{3}$. Соответственно и прогрессий было бы не две, а шесть. Аналогично и во второй задаче (324) пришлось бы рассматривать все четыре корня уравнения $q^4=16$, что привело бы к четырем прогрессиям вместо двух.

Пример 325. Найти общий член последовательности, первые три члена которой 3, 5, 10, а разности между соседними членами образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Если обозначим последовательность так: a_1, a_2, ..., a_n, ..., то значение a_n, соответствующее произвольному натуральному n, называется общим членом последовательности. В данном случае это n-й член, но за общий член можно также принять $(n-1)$-й или $(n+1)$-й член или другие.

Итак, нам нужно найти n-й член последовательности. Так как $a_2-a_1=5-3=2$, $a_3-a_2=5$, то арифметическая прогрессия, составленная из разностей соседних членов рассматриваемой последовательности, имеет первые два члена $b_1=2$ и $b_2=5$, а разность $d=b_2-b_1=3$.

Так как по условию задачи $a_n-a_{n-1}=b_{n-1}$, то можно написать: $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_1+b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=a_1+\frac{b_1+b_{n-1}}{2}(n-1)=$

$=a_1+\frac{2b_1+d(n-2)}{2}(n-1)=3+\frac{4+3(n-2)}{2}(n-1)=$

$=\frac{1}{2}(3n^2-5n+8)$.

Пример 326. Найти сумму n членов последовательности если даны два ее первых члена $\frac{3}{2}$ и $\frac{7}{4}$ и известно, что числители 1-го, 2-го и т. д. членов последовательности образуют арифметическую прогрессию, а знаменатели — геометрическую.

Решение. Так как первые два члена арифметической прогрессии, составленной из числителей членов последовательности, есть 3 и 7, а ее разность $d = 7 - 3 = 4$, то числитель n-го члена последовательности будет $a_n = 3 + 4(n-1) = 4n - 1$. Учитывая, что знаменатель n-го члена последовательности есть n-й член геометрической прогрессии 2, 4, ... со знаменателем $q = \frac{4}{2} = 2$, найдем для него значение $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. Итак, необходимо отыскать сумму

$$S_n = \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{11}{8} + \ldots + \frac{4n-1}{2^n}.$$

Преобразуем числители дробей рассматриваемой суммы, воспользовавшись определением арифметической прогрессии, т. е. используя формулу $a_k = a_{k-1} + d = a_{k-1} + 4$. Получим:

$$S_n = \frac{3}{2} + \frac{3+4}{4} + \frac{7+4}{8} + \frac{11+4}{16} + \ldots + \frac{(4n-5)+4}{2^n} =$$

$$= \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{11}{16} + \ldots + \frac{4n-5}{2^n}\right) + \left(\frac{4}{4} + \frac{4}{8} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{16} + \ldots + \frac{4}{2^n}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{11}{8} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{4n-5}{2^{n-1}} + \frac{4n-1}{2^n} - \frac{4n-1}{2^n}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(S_n - \frac{4n-1}{2^n}\right) + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(S_n - \frac{4n-1}{2^n}\right) +$$

$$+ 2 - \frac{2}{2^{n-1}}, \quad S_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}S_n - \frac{4n-1}{2^{n+1}} + 2 - \frac{2}{2^{n-1}},$$

$$2S_n = 3 + S_n - \frac{4n-1}{2^n} + 4 - \frac{8}{2^n}, \quad S_n = 7 - \frac{4n-1}{2^n} - \frac{8}{2^n},$$

$$S_n = \frac{1}{2^n}[7(2^n - 1) - 4n].$$

Пример 327. Решить систему уравнений

$$2x^2 = y^2 + z^2; \quad xyz = 64,$$

зная, что $\log_y x$, $\log_z y$, $\log_x z$ образуют геометрическую прогрессию.

Решение. Так как $\log_y x$, $\log_z y$, $\log_x z$ образуют геометрическую прогрессию, то они связаны зависимостью $\log_z^2 y = \log_x z \cdot \log_y x$ (см. пример 316). Это соотношение, если воспользоваться формулой $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (см. пример 69), примет вид $\log_z^2 y = \frac{1}{\log_z x} \cdot \frac{\log_z x}{\log_z y}$. Отсюда $\log_z^3 y = 1$, $\log_z y = 1$, $y = z$.

Подставив $y = z$ в первое уравнение системы, найдем: $2x^2 = 2y^2$, $x^2 = y^2$, $x = y$. Имея теперь $x = y = z$, получим из второго уравнения системы, что $x^3 = 64$. Итак, система имеет единственное решение: $x = y = z = 4$.

Пример 328. Сумма трех первых членов арифметической прогрессии равна 21. Если второй член увеличить на 2, а третий — на 16, то они станут первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии. Найти арифметическую прогрессию.

Решение. $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, $(a_2 + 2)^2 = a_1(a_3 + 16)$. Но $a_1 + a_3 = 2a_2$, и из первого уравнения найдем $3a_2 = 21$, $a_2 = 7$. Подставляя во второе уравнение $a_2 = 7$ и $a_3 = 2a_2 - a_1 = 14 - a_1$, получим: $9^2 = a_1(30 - a_1)$, $a_1^2 - 30a_1 + 81 = 0$, $a_1 = 15 \pm 12$. Отсюда находим: 1) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $d = a_2 - a_1 = 4$; 2) $a_1 = 27$, $a_2 = 7$, $d = -20$. Таким образом, имеем две прогрессии: 3, 7, 11, ... и 27, 7, —13, ...

81. Геометрическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется бесконечно убывающей, если знаменатель прогрессии q по абсолютной величине меньше единицы: $|q| < 1$. Величины $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, ... называются частичными суммами последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ В частности, для геометрической прогрессии они имеют вид: $S_1 = a_1$, $S_2 = \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$, ..., $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, ... Если $|q| < 1$, то существует предел последовательности частичных сумм $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, и он равен $\frac{a_1}{1-q}$. Этот предел называется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, что записывают иногда так: $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

Напомним, что число z называется пределом последовательности $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что все значения z_n, у которых $n > N$, удовлетворяют неравенству $|z_n - z| < \varepsilon$.

Более коротко (но менее точно): число z называется пределом последовательности $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, если все члены этой последовательности, начиная с некоторого члена, отличаются от z как угодно мало.

Следует помнить, что равенство $S = \frac{a_1}{1-q}$ есть теорема, а равенство $S = \lim S_n$ — определение.

Если $|q| > 1$, то S_n не имеет предела.

Пример 329. Найти бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $3, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, зная ее сумму, равную 2, и сумму прогрессии $27, a_2^2, \ldots, a_n^3, \ldots$, равную 24.

Решение. Вторая прогрессия тоже бесконечно убывающая и если знаменатель первой есть q, то знаменатель второй q^3. Поэтому можно написать: $\frac{3}{1-q}=2$ и $\frac{27}{1-q^3}=24$. Разделив первое равенство на второе, получим: $\frac{1}{9}(1+q+q^2)=\frac{1}{12}$, $4q^2+4q+1=0$. Отсюда $q=-\frac{1}{2}$, и искомая прогрессия имеет вид $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \ldots$

Пример 330. Решить уравнение

$$1+\log_2\cos x+\log_2^2\cos x+\log_2^3\cos x+\ldots=0, \quad (6).$$

Решение. Последовательность $1, \log_2\cos x, \log_2^2\cos x, \ldots$ есть геометрическая прогрессия, и раз она по условию имеет сумму, то прогрессия бесконечно убывающая. Поэтому можно написать $\frac{1}{1-\log_2\cos x}=\frac{6}{9}$. Отсюда

$$3=2-2\log_2\cos x;\ \log_2\cos x=-\frac{1}{2};\ \cos x=2^{-\frac{1}{2}};$$

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}};\ x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}.$$

§ 2. Соединения и бином Ньютона

82. Если из некоторого числа каких-либо предметов (элементов) составляются группы этих предметов, отличающиеся одна от другой самими предметами или их порядком, то такие группы называются соединениями.

Размещениями из m элементов по n называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m элементов, и отличается от другого или элементами, или порядком элементов.

Число A_m^n всевозможных размещений из m элементов по n может быть вычислено по формуле

$$A_m^n=m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

Перестановками из m элементов называются соединения, каждое из которых содержит m этих элементов и отличается от другого порядком элементов.

Число P_m всевозможных перестановок из m элементов может быть вычислено по формуле

$$P_m = A_m^m = m(m-1)\cdots 2\cdot 1 = m!.$$

Сочетаниями из m элементов по n называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m элементов, и отличается от другого хотя бы одним элементом.

Число C_m^n всевозможных сочетаний из m элементов по n может быть вычислено по формуле

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = C_m^{m-n}.$$

Пример 331. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 2, 2, 3?

Решение. Составим какое-нибудь пятизначное число из данных пяти цифр, например 12 223, и сделаем всевозможные перестановки цифр. Получим количество чисел, равное P_5. Но те из чисел, которые получились перестановками одинаковых цифр, дадут и одинаковые числа. В каждом числе можно сделать таких перестановок P_3, поскольку в нем есть три одинаковые цифры. Следовательно, искомое количество чисел $S = \frac{P_5}{P_3} =$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 20.$$

Пример 322. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 2, 3?

Решение. Все трехзначные числа, которые можно составить из данных четырех цифр, содержат или одну цифру 2, или две. Первые получатся всевозможными перестановками из цифр 1, 2, 3, и число их будет P_3. Вторые получатся из групп цифр 1, 2, 2 и 2, 2, 3. Но, рассуждая, как в примере 331, убедимся, что количество различных трехзначных чисел, которое может быть получено из каждой группы, равно $\frac{P_3}{P_2}$. Следовательно, искомое количество чисел $S = P_3 + 2\frac{P_3}{P_2} = 1\cdot 2\cdot 3 + \frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2} =$

$$= 6 + 6 = 12.$$

Пример 333. Сколькими различными способами можно рассадить за круглым столом 4 мужчин и 4 женщин, чтобы рядом не сидели двое мужчин или две женщины?

Решение. Пусть одна из женщин заняла определенное место за столом. Число способов размещения трех остальных женщин на трех местах через одно будет равно P_3. На оставшиеся 4 места при каждом определенном размещении женщин

мужчин можно рассадить числом способов, равным P_4. Следовательно, искомое число размещений равно $P_3 \cdot P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 144$.

Пример 334. Из 12 лотерейных билетов, среди которых находятся 4 выигрышных, берут 6 билетов. Сколькими способами можно взять 6 билетов, чтобы среди них находился хотя бы один выигрышный?

Решение. Число способов взять какие-нибудь 6 билетов из 12 равно C_{12}^6. Число способов взять 6 билетов так, чтобы среди них не было ни одного выигрышного, равно C_8^6. Следовательно, искомое число способов равно: $C_{12}^6 - C_8^6 = C_{12}^6 - C_8^2 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \; 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 33 \cdot 28 - 28 = 28 \cdot 32 = 896$.

Пример 335. Решить систему уравнений

$$A_m^n = 210; \quad C_m^{m-n} = 105.$$

Решение. $C_m^{m-n} = C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{210}{P_n} = 105$. Отсюда $P_n = 2$, $n! = 2$, $n = 2$, $A_m^2 = m(m-1)$, $m(m-1) = 210$, $m^2 - m - 210 = 0$, $m = 15$.

83. Следующая формула, представляющая выражение $(x + a)^n$ при натуральном n в виде приведенного многочлена, называется формулой бинома Ньютона:

$$(x + a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \cdots + C_n^k x^{n-k} a^k + \cdots + a^n$$

или

$$(x + a)^n = x^n + \frac{n}{1!} x^{n-1} a + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \times x^{n-k} a^k + \cdots + a^n.$$

Многочлен, стоящий в правой части формулы, называется разложением бинома.

Число членов разложения на единицу больше показателя бинома. Любой член разложения может быть написан с помощью формулы общего члена разложения

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} x^{n-k} a^k.$$

Коэффициенты членов разложения называются биномиальными. Они возрастают от единицы до некоторого наибольшего числа и затем убывают от этого наибольшего до 1. Наибольший коэффициент один, и он принадлежит члену, находящемуся посередине разложения, если показатель бинома — четное число. Наибольших коэффициентов будет два, и они принадлежат чле-

нам, находящимся посередине разложения, если показатель бинома — нечетное число. Коэффициенты членов, равноотстоящих от конца разложения, равны. Сумма всех биномиальных коэффициентов разложения равна 2^n, а стоящих на четных (или нечетных) местах 2^{n-1}.

Пример 336. В разложении $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ коэффициент третьего члена разложения больше коэффициента второго на 35. Найти член разложения, не содержащий x.

Решение. $C_n^2 - C_n^1 = 35$, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} - n = 35$, $n^2 - 3n - 70 = 0$, $n = 10$. Напишем общий член разложения: $T_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{10}^k x^{10-2k}$. Так как член разложения не должен содержать x, то показатель $10 - 2k = 0$. Отсюда $k = 5$ и искомый член $T_6 = C_{10}^5 = \frac{10\ 9\ 8\ 7\ 6}{1\ 2\ 3\ 4\ 5} = 252$.

Пример 337. Коэффициенты 2, 3 и 4-го членов разложения $(a+b)^n$ составляют арифметическую прогрессию. Найти эти члены.

Решение. Найдем показатель n бинома. По условию $C_n^3 + C_n^1 = 2C_n^2$ или $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + n = 2\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$. Разделив уравнение на $n \neq 0$, получим: $\frac{(n-1)(n-2)}{6} + 1 = n - 1$, $n^2 - 9n + 14 = 0$; $n_1 = 7$, $n_2 = 2$. При $n = 7$ искомые члены будут: $T_2 = C_7^1 a^6 b = 7a^6 b$, $T_3 = C_7^2 a^5 b^2 = 21a^5 b^2$, $T_4 = C_7^3 a^4 b^3 = 35a^4 b^3$. Если $n = 2$, то разложение $(a+b)^2$ не имеет четвертого члена. Однако если отсутствие четвертого члена означает, что есть член, равный нулю, то тогда члены $2ab$, b^2 и 0 удовлетворяют условиям задачи их коэффициенты 2, 1, 0 образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = -1$.

Пример 338. Сколько рациональных членов содержится в разложении $\left(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5}\right)^{124}$?

Решение. Напишем общий член разложения: $T_{k+1} = C_{124}^k \left(\sqrt{3}\right)^{124-k} \left(\sqrt[4]{5}\right)^k = C_{124}^k 3^{\frac{124-k}{2}} \cdot 5^{\frac{k}{4}}$, причем k принимает значения всех целых чисел от 0 до 124. Чтобы член разложения был рациональным, достаточно, чтобы числа $\frac{124-k}{2}$ и $\frac{k}{4}$ были целыми, а это будет иметь место, когда $k = 4n$. Но $0 \leqslant k \leqslant 124$ и, следовательно, $0 \leqslant 4n \leqslant 124$, $0 \leqslant n \leqslant 31$. Итак, n принимает значения 0, 1, 2, ..., 31, т. е. искомое число членов равно 32.

Пример 339. Найти члеи разложения $(3x+2)^7$ с наибольшим коэффициентом.

Решение. Напишем общий член разложения: $T_{k+1} = C_7^k (3x)^{7-k} 2^k = C_7^k 3^{7-k} 2^k x^{7-k} = A_{k+1} x^{7-k}$. Выясним, при каких k выполняется неравенство $\frac{A_{k+1}}{A_k} > 1$. Учитывая, что $A_{k+1} = C_7^k 3^{7-k} 2^k$, это неравенство записываем так: $\frac{C_7^k 3^{7-k} 2^k}{C_7^{k-1} 3^{8-k} 2^{k-1}} > 1$; $\frac{(7-k+1) C_7^{k-1} \cdot 2}{k \cdot C_7^{k-1} 3} > 1$; $\frac{(8-k)2}{3k} > 1$. Отсюда $16-2k > 3k$, $16 > 5k$, $k < \frac{16}{5}$. Так как k — целое неотрицательное число, то отсюда заключаем, что $k \leqslant 3$. Если $k \geqslant 4$, то следующие коэффициенты A_{k+1} меньше предыдущих A_k. Итак, $A_2 > A_1$, $A_3 > A_2$, $A_4 > A_3$, но $A_5 < A_4$. Следовательно, наибольший коэффициент будет A_4, а искомый член разложения $T_4 = A_4 x^4 = C_7^3 \cdot 3^4 \cdot 2^3 x^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3^4 \cdot 2^3 x^4 = 7 \cdot 5 \cdot 3^4 \cdot 2^3 x^4 = 22\,680 x^4$.

Пример 340. Найти член разложения $\left(\frac{1}{x} + 3x\right)^n$, не содержащий x, зная, что 10-й член этого разложения имеет наибольший коэффициент.

Решение Формула общего члена бинома имеет следующий вид:

$$T_{k+1} = C_n^k \left(\frac{1}{x}\right)^{n-k} (3x)^k = C_n^k \cdot 3^k x^{2k-n}.$$

Из нее видно, что коэффициент общего члена равен $A_{k+1} = C_n^k \cdot 3^k$. Так как по условию коэффициент A_{10} наибольший, то имеют место неравенства

$$A_{10} > A_9 \text{ и } A_{10} > A_{11},$$

которые можно записать так:

$$C_n^9 \cdot 3^9 > C_n^8 \cdot 3^8 \text{ и } C_n^9 \cdot 3^9 > C_n^{10} \cdot 3^{10}.$$

Если же учесть известное соотношение

$$C_n^k = C_n^{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k},$$

то неравенства можно привести к виду:

$$\frac{n-8}{9} \cdot 3 > 1 \text{ и } 1 > \frac{n-9}{10} \cdot 3.$$

Из первого неравенства находим $n-8 > 3$, $n > 11$. Аналогично получим из второго неравенства: $n-9 < \frac{10}{3}$, $n < 9 + \frac{10}{3}$, $n < 12\frac{1}{3}$. Сопоставляя эти два результата, найдем, что $11 < n < 12\frac{1}{3}$, а так как n целое, то $n = 12$.

Обращаемся снова к формуле общего члена бинома

$$T_{k+1} = C_{12}^{k} \cdot 3^k x^{24-2k}.$$

Чтобы получить член, не содержащий x, достаточно положить $12 - 2k = 0$, что дает $k = 6$.

Итак, искомый член $T_7 = C_{12}^{6} \cdot 3^6 = 673\,596$.

Пример 341. Найти член разложения $(2 + x + x^2)^9$, содержащий x^2.

Решение. Положим $x + x^2 = x(1 + x) = y$. Тогда данное выражение будет иметь вид бинома $(2 + y)^9$, общий член которого $T_{k+1} = C_9^k \cdot 2^{9-k} y^k$, причем $0 \leqslant k \leqslant 9$. Но $y^k = x^k (1 + x)^k$, и, обозначая общий член бинома $(1 + x)^k$ символом L_{m+1}, получаем $L_{m+1} = C_k^m x^m$, где $0 \leqslant m \leqslant k$.

Таким образом, общий член выражения $(2 + x + x^2)^9$ запишется так:

$$T_{k+1} = C_9^k \cdot C_k^m \cdot 2^{9-k} x^{k+m},$$

причем $0 \leqslant k \leqslant 9$, $0 \leqslant m \leqslant k$, $m + k = 2$.

Из последних двух соотношений следует, что $0 \leqslant m = 2 - k \leqslant k$, т. е $0 \leqslant 2 - k$, $2 - k \leqslant k$, а тогда $k \leqslant 2$ и $k \geqslant 1$ или $1 \leqslant k \leqslant 2$. Но таких целых значений k возможно только два: $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$. Так как $m = 2 - k$, то соответствующие значения m будут такими: $m_1 = 1$, $m_2 = 0$. Заметим, что под C_k^0 подразумевается единица.

Теперь можем написать искомый член разложения: $A_2 x^2 = C_9^1 \cdot C_1^1 \cdot 2^8 x^2 + C_9^2 \cdot C_2^0 \cdot 2^7 x^2 = 2^7 \left(9 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 1\right) x^2 = 2^7 \cdot 9 \cdot (2 + 4) x^2 = 2^8 \cdot 3^3 x^2 = 6\,912 x^2$.

Пример 342. Доказать равенство

$$C_{2n}^{n} = 1 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2.$$

Решение. C_{2n}^{n} является биномиальным коэффициентом при x^n в разложении $(1 + x)^{2n}$. С другой стороны, $(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n (x + 1)^n$, и тот же коэффициент можно получить, собрав коэффициенты при x^n в произведении: $(1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n)(x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \cdots + 1)$. Он получится, если умножить первые члены этих разложений, затем вторые и т. д., наконец, последние и результаты сложить. Это и приведет нас к равенству $1^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^{n}$.

§ 3. Метод математической индукции

84. *Если какое-нибудь утверждение справедливо для единицы и если каждый раз, когда оно справедливо для какого-нибудь натурального числа, оно справедливо и для следующего числа, то оно справедливо для любого натурального числа.*

Сформулированное предложение называется **принципом математической индукции**

Метод доказательства, основанный на принципе математической индукции, называется методом математической индукции.

Применение метода математической индукции сводится: 1) к проверке высказанного утверждения для $n = 1$; 2) к предположению, что утверждение верно для $n = k$; 3) к доказательству теоремы, что из предположения справедливости утверждения для $n = k$ следует его справедливость и для $n = k + 1$.

Иногда пункт 1 рассматривают не с $n = 1$, а с какого-нибудь другого $n = m$. Например, при доказательстве свойств многогранников нам пришлось бы начинать с $n = 4$. Однако это не умаляет общиости сформулированного выше, так как всегда можно положить $n = \nu + m - 1$ и рассматривать процесс доказательства, начиная с $\nu = 1$.

Пример 343. Доказать равенство

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=$$
$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

Доказательство. Пусть левая часть равенства есть S_n, а правая σ_n. Пользуемся методом математической индукции. 1) $S_1=\frac{1}{1\cdot3\cdot5}=\frac{1}{15}$, $\sigma_1=\frac{1(1+1)}{2(2\cdot1+1)(2\cdot1+3)}=\frac{1\cdot2}{2\cdot3\cdot5}=\frac{1}{15}$. При $n = 1$ равенство справедливо. 2) Предположим, что $S_{k-1}=\sigma_{k-1}$, т. е. $S_{k-1}=\frac{(k-1)k}{2(2k-1)(2k+1)}$. 3) Докажем, что $S_k=\sigma_k$ или, иначе, $S_k=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}$. Действительно, $S_k=S_{k-1}+$

$$+\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k-1)k}{2(2k-1)(2k+1)}+\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=$$
$$=\frac{k}{(2k-1)(2k+1)}\left(\frac{k-1}{2}+\frac{1}{2k+3}\right)=\frac{k}{(2k-1)(2k+1)}\cdot\frac{2k^2+k-1}{2(2k+3)}=$$
$$=\frac{k[(2k^2-k)+(2k-1)]}{2(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k-1)(k+1)}{2(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}$$

Равенство доказано.

Пример 344. Доказать равенство

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\cdots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}.$$

Доказательство. Обозначим левую часть равенства S_n, а правую σ_n. 1) $S_1=\frac{x}{1-x^2}$, $\sigma_1=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^2}{1-x^2}=\frac{x(1-x)}{(1-x)(1-x^2)}=$

$=\frac{x}{1-x^2}$. При $n = 1$ равенство справедливо. 2) Допустим, что $S_k=\sigma_k$, т. е. $S_k=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^k}}{1-x^{2^k}}$. Докажем, что $S_{k+1}=\sigma_{k+1}$,

На самом деле, $S_{k+1} = S_k + \frac{x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x-x^{2^k}}{1-x^{2^k}} + \frac{x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}}$.

Положим для сокращения записи $2^k = m$. Будем иметь $S_{k+1} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x-x^m}{1-x^m} + \frac{x^m}{1-x^{2m}} = \frac{1}{(1-x)(1-x^{2m})} [(x-x^m)(1+$ $+ x^m) + x^m(1-x)] = \frac{1}{(1-x)(1-x^{2m})} (x - x^m + x^{m+1} - x^{2m} +$ $+ x^m - x^{m+1}) = \frac{x-x^{2m}}{(1-x)(1-x^{2m})} = \frac{x-x^{2^k+1}}{(1-x)(1-x^{2^{k+1}})} = \sigma_{k+1}$.

Равенство доказано.

Пример 345. Доказать равенство

$$\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \cdots + \frac{1}{\cos nx \cos (n+1)x} = \frac{\operatorname{tg}(n+1)x - \operatorname{tg} x}{\sin x}.$$

Доказательство. Обозначим левую часть равенства S_n, а правую σ_n. 1) $S_1 = \frac{1}{\cos x \cos 2x}$, $\sigma_1 = \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin(2x-x)}{\sin x \cos x \cos 2x} =$ $= \frac{\sin x}{\sin x \cos x \cos 2x} = \frac{1}{\cos x \cos 2x} = S_1$. 2) Предположим, что $S_{k-1} =$ $= \sigma_{k-1}$, следовательно, $S_{k-1} = \frac{\operatorname{tg} kx - \operatorname{tg} x}{\sin x}$. 3) Докажем, что $S_k = \sigma_k$. Действительно, $S_k = S_{k-1} + \frac{1}{\cos kx \cos (k+1)x} = \frac{\operatorname{tg} kx - \operatorname{tg} x}{\sin x} +$ $+ \frac{1}{\cos kx \cos (k+1)x} = \frac{\sin(kx-x)}{\sin x \cos kx \cos x} + \frac{1}{\cos kx \cos (k+1)x} =$ $= \frac{\sin(k-1)x \cos(k+1)x + \sin x \cos x}{\sin x \cos x \cos kx \cos (k+1)x} = \frac{\sin 2kx - \sin 2x + \sin 2x}{2 \sin x \cos x \cos kx \cos (k+1)x} =$ $= \frac{\sin[(k+1)-1]x}{\sin x \cos x \cos (k+1)x} = \frac{\sin(k+1)x \cos x - \cos(k+1)x \sin x}{\sin x \cos x \cos (k+1)x} =$ $= \frac{\operatorname{tg}(k+1)x - \operatorname{tg} x}{\sin x} = \sigma_k$.

Равенство доказано.

Пример 346. Доказать равенство

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - 2 \operatorname{ctg} 2x.$$

Доказательство. Обозначим левую часть равенства S_n. При $n = 1$ равенство справедливо. Действительно,

$$S_1 = \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1-\cos x}{2 \sin x} = \frac{2 \sin^2 x + \cos x - \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} =$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\cos x (1 + \cos x) - 2 \cos 2x}{2 \sin x \cos x} =$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x)}{2\sin x\cos x} - \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1+\cos x}{2\sin x} - 2\operatorname{ctg} 2x =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - 2\operatorname{ctg} 2x.$$

Предположим, что равенство справедливо при $n = k-1$, и докажем, что при $n = k$ оно тоже справедливо В самом деле,

$$S_k = S_{k-1} + \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-1}} - 2\operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k} =$$

$$= \frac{1}{2^k}\left(2\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-1}} + \operatorname{tg}\frac{x}{2^k}\right) - 2\operatorname{ctg} 2x.$$

Но, положив $\frac{x}{2^k} = \alpha$, получим для выражения в скобках

$$2\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg} 2\alpha + (\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{ctg} 2\alpha +$$

$$+ \frac{\cos 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha + \frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}.$$

Итак, $S_k = \frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k} - 2\operatorname{ctg} 2x$. Равенство доказано.

Пример 347. Доказать формулу Муавра

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha,$$

где n — натуральное число.

Доказательство. При $n = 1$ формула справедлива Предположим, что она справедлива при $n = k$, и рассмотрим ее левую часть при $n = k+1$. Получим

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k+1} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^k(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$

$$= (\cos k\alpha + i\sin k\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = (\cos k\alpha\cos\alpha -$$

$$-\sin k\alpha\sin\alpha) + i(\sin k\alpha\cos\alpha + \cos k\alpha\sin\alpha) = \cos(k\alpha+\alpha) +$$

$$+ i\sin(k\alpha+\alpha) = \cos(k+1)\alpha + i\sin(k+1)\alpha.$$

Формула доказана.

Можно доказать, что формула Муавра верна и при целом отрицательном n.

Пример 348. Доказать равенство

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.$$

Доказательство. При $n = 1$ равенство справедливо. Действительно, в левой части в этом случае имеем $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ и в правой части равенства $\operatorname{arctg}\frac{1}{1+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Предположим, что при $n = k-1$ доказываемое равенство тоже справедливо, т. е. левая часть равенства $S_{k-1} = \operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}$. В этом предположении докажем, что равенство справедливо и при $n = k$.

На самом деле, $S_k = S_{k-1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg}\frac{k-1}{k} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}$.

Отсюда получаем, что $\operatorname{tg} S_k = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{k-1}{k} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}\right) =$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}\right)} = \frac{\frac{k-1}{k} + \frac{1}{2k^2}}{1 - \frac{k-1}{k}\cdot\frac{1}{2k^2}} =$$

$$= \frac{2k(k-1)+1}{2k^3-(k-1)} \cdot k = \frac{(2k^2-2k+1)k}{2k^3-k+1} =$$

$$= \frac{(2k^2-2k+1)k}{(2k^3-2k^2+k)+(2k^2-2k+1)} = \frac{(2k^2-2k+1)k}{(2k^2-2k+1)(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Итак, $\operatorname{tg} S_k = \frac{k}{k+1}$. Следовательно,

$$S_k = m\pi + \operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}, \qquad (*)$$

где m — целое число. Но так как $0 < \frac{k-1}{k} < 1$, $0 < \frac{1}{2k^2} < 1$, то $0 < \operatorname{arctg}\frac{k-1}{k} < \frac{\pi}{4}$, $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} < \frac{\pi}{4}$, $0 < \operatorname{arctg}\frac{k-1}{k} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} < \frac{\pi}{2}$ и $0 < S_k < \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, в равенстве (*) возможно только $m = 0$.

Итак, $S_k = \operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}$, и, таким образом, равенство доказано.

Пример 349. При каких натуральных n справедливо неравенство $2^n > 5n$?

Решение. При $n = 1, 2, 3, 4$ неравенство несправедливо. При $n = 5$ оно верно.

Предположим, что неравенство верно при $n = k$, т. е. $2^k > 5k$. Докажем, что тогда и $2^{k+1} > 5(k+1)$. Действительно, $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > 5k \cdot 2 = 5k + 5k$, и поскольку $k > 1$ и $5k > 5$, то $2^{k+1} > 5k + 5$ и $2^{k+1} > 5(k+1)$.

Итак, неравенство $2^n > 5n$ справедливо при любом натуральном $n \geqslant 5$.

Пример 350. Доказать неравенство

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{a^2 + \cdots + \sqrt{a^2}}} < |a| + 1$$

для любого числа n корней, входящих в неравенство.

Доказательство. При $n = 1$ неравенство справедливо. Действительно, $\sqrt{a^2} = |a| < |a| + 1$. Обозначим левую часть неравенства S_n и, предположив справедливость неравенства $S_k < |a| + 1$, докажем справедливость неравенства $S_{k+1} < |a| + 1$. Найдем

$$S_{k+1} = \sqrt{a^2 + S_k} < \sqrt{a^2 + |a| + 1} \leqslant \sqrt{|a|^2 + 2|a| + 1} =$$

$$= \sqrt{(|a|+1)^2} = |a| + 1.$$

Неравенство доказано.

Пример 351. Доказать, что число $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, где n — любое натуральное число, делится на 17.

Доказательство. Обозначим это число a_n. Положим $n = 1$. Получим $a_1 = 3 \cdot 5^3 + 2^4 = 3 \cdot 125 + 16 = 375 + 16 = 391 = 17 \cdot 23$, т. е. a_1 делится на 17. Предположим, что a_k делится на 17, и докажем, что тогда и a_{k+1} тоже делится на 17.

Действительно, $a_{k+1} = 3 \cdot 5^{2k+3} + 2^{3k+4} = 3\ 5^{2k+1} \cdot 5^2 + 2^{3k+1} \times 2^3 = 25 \cdot 3 \cdot 5^{2k+1} + 8 \cdot 2^{3k+1} + 3\,(8 + 17)\,5^{2k+1} + 8\ 2^{3k+1} = 8\ 3 \times 5^{2k+1} + 8 \cdot 2^{3k+1} + 3 \cdot 17 \cdot 5^{2k+1} = 8\,(3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}) + 3 \cdot 17 \cdot 5^{2k+1} = 8a_k + 3 \cdot 17 \cdot 5^{2k+1}$.

Так как a_k по предположению делится на 17, а делимость на 17 второго слагаемого в выражении a_{k+1} очевидна, то и a_{k+1} разделится на 17. Тем самым утверждение доказано.

Пример 352. В числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, ... каждый член, начиная с 3-го, равен сумме двух предыдущих. Доказать, что каждый 4-й член этой последовательности, т. е. члены, стоящие на 4, 8, 12-м и т. д. местах, делится на 3.

Доказательство Обозначим последовательность четвертых членов так a_4, a_8, a_{12}, ..., a_{4n}, ... Нужно доказать, что при любом n число a_{4n} делится на 3. Так как $a_4 = 3$, то при $n = 1$ утверждение справедливо. Предположим, что оно также справедливо и при $n = k$, т. е число a_{4k} делится на 3. Чтобы доказать делимость на 3 числа a_{4k+4}, воспользуемся данным соотношением, связывающим любой член последовательности с двумя предыдущими членами:

$$a_m = a_{m-1} + a_{m-2}$$

Тогда получим

$$a_{4k+4} = a_{4k+3} + a_{4k+2} = (a_{4k+2} + a_{4k+1}) + a_{4k+2} = 2a_{4k+2} + a_{4k+1} = 2\,(a_{4k+1} + a_{4k}) + a_{4k+1} = 3a_{4k+1} + 2a_{4k}.$$

Итак,

$$a_{4k+4} = 3a_{4k+1} + 2a_{4k}.$$

Оба слагаемых правой части полученного равенства делятся на 3. Первое потому, что в нем есть множитель 3, а второе потому, что в нем есть множитель a_{4k}, который по предположению делится на 3. Следовательно, и их сумма, т. е. число a_{4k+4}, также разделится на 3. Этим и доказана делимость числа a_{4n} на 3 при любом n.

Пример 353. Найти n-й член последовательности x_1, x_2, ..., x_n, ..., в которой каждый член, начиная с 3-го, есть среднее арифметическое двух предыдущих членов, а $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Решение Замечая, что $x_2 - x_1 = 1 - 2 = -1$; $x_3 - x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{1}{2}$; $x_4 - x_3 = \frac{x_2 + x_3}{2} - x_3 = \frac{x_2 - x_3}{2} = -\frac{1}{4}$, высказываем предположение, что

$$x_n - x_{n-1} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}. \qquad (*)$$

При $n=2$ (и даже при $n=3$ и $n=4$) справедливость равенства (*) уже проверена. Предположим теперь, что оно справедливо при $n=k$, и докажем его справедливость при $n=k+1$. Таким образом, нам нужно, исходя из равенства $x_k - x_{k-1} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}$, доказать равенство $x_{k+1} - x_k = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

Имеем $x_{k+1} - x_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} - x_k = -\frac{1}{2}(x_k - x_{k-1}) = -\frac{1}{2}\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}\right] = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$. Итак, равенство (*) доказано для всех $n \geqslant 2$. Пользуясь им, получим: $x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} =$

$$= 2 - \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right] = 2 - \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 -$$

$$- \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{4}{3} + \frac{(-1)^{n-1}}{3 \cdot 2^{n-2}}.$$

Пример 354. Доказать, что сторона правильного многоугольника, имеющего число сторон 2^n, выражается через радиус R описанной около многоугольника окружности следующей формулой:

$$a_{2^n} = R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ двойки}}}.$$

Доказательство. Здесь имеет смысл считать лишь $n \geqslant 2$. При $n=2$ получим квадрат. Для него $a_4 = R\sqrt{2}$, т. е. доказываемая формула справедлива. Пусть формула справедлива для $n=k$. Докажем справедливость ее для $n=k+1$, пользуясь формулой удвоения. Получим

$$a_{2^{k+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_{2^k}^2}} =$$

$$= \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\left(R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{k-2 \text{ двойки}}}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{4 - \left(2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{k-2 \text{ двойки}}\right)}} =$$

$$= R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{k-1 \text{ двойка}}}.$$

Формула доказана.

Пример 355. Доказать, что n прямых, лежащих в одной плоскости и имеющих общую точку, делят плоскость на $2n$ частей.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение справедливо — прямая делит плоскость на две части. Пусть утверждение справедливо при $n = k$, т. е. плоскость k прямыми разделена на $2k$ частей. Тогда $(k + 1)$-я прямая, проходящая через общую точку прямых, разделит надвое каждую из тех двух частей плоскости, которые заключены между двумя ранее проведенными прямыми, ближайшими к последней с той и другой стороны. Значит, плоскость будет разделена на $(2k + 2)$ части. Этим и завершается доказательство утверждения.

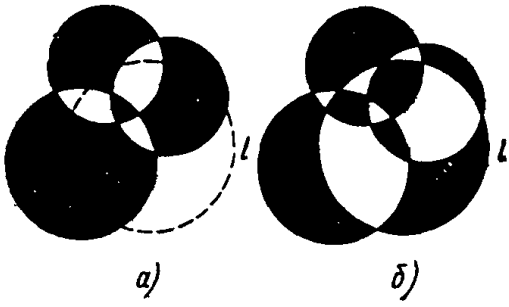

Рис. 97

Пример 356. Доказать, что n окружностей, лежащих в одной плоскости, разбивают эту плоскость на области, которые можно закрасить белой и черной красками так, что все смежные области (т. е. области, имеющие общую границу) будут закрашены разными красками (белой и черной).

Решение. Пусть в плоскости M проведена одна окружность. Она разделит плоскость на две области (т. е. на две части) — внутреннюю и внешнюю по отношению к окружности. Одну из этих областей можно закрасить черной краской, а другую — белой. Таким образом, при $n=1$ утверждение доказано

Предположим теперь, что при $n = k$ утверждение тоже верно, т. е. после проведения k окружностей на плоскости M плоскость разбилась на области так, что смежные области закрашены разными красками (белой и черной). Проведем $(k+1)$-ю окружность и обозначим ее буквой l (рис. 97, *а*, пунктир).

Окружность l разделит плоскость M на две части — внутреннюю M_1 по отношению к окружности l и внешнюю M_2 по отношению к ней. Перекрасим M_1 так, чтобы каждая область, закрашенная черной краской, после проведения l стала закрашена белой и наоборот (рис. 97, *б*). В M_2 сохраним прежнюю окраску.

Рассмотрим теперь две произвольные смежные области N_1 и N_2 Области N_1 и N_2 могут находиться по разные стороны окружности l, т. е. одна может находиться в M_1, а другая — в M_2, но они могут быть по одну сторону окружности l, находясь обе в M_1 или же обе в M_2

В первом случае области N_1 и N_2 после проведения k окружностей, но до проведения окружности l составляли одну область

н имели одинаковую окраску. После проведения окружности l та часть ее (N_1 или N_2), которая оказалась в M_1, изменила свою окраску, а другая часть (N_2 или N_1), оказавшаяся в M_2, сохранила прежнюю окраску. Поэтому области N_1 и N_2 в рассматриваемом случае окрашены разными красками.

Во втором случае области N_1 и N_2 после проведения k окружностей и до проведения $(k+1)$-й окружности l содержались в двух различных соседних областях с общей границей на одной из первых k окружностей. Если теперь они находятся в M_1, где черная окраска заменена белой, а белая — черной, то они закрашены разными красками, потому что до проведения окружности l они были закрашены разными, хотя и другими, красками. Если же теперь они находятся в M_2, где окраска сохранена прежняя, то они тоже закрашены разными красками, потому что раньше они были закрашены так же.

Таким образом, утверждение справедливо и при $n = k + 1$. Следовательно, оно справедливо при любом n.

85. Для доказательства формул вычисления A_m^n, P_m, C_m^n недостаточно убедиться в справедливости их для определенных n. То же относится и к ряду других формул. Для доказательства их применяют метод математической индукции. Ниже приведены образцы таких доказательств.

Пример 357. Доказать, что в арифметической прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, ... с разностью d любой член $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Доказательство. При $n = 1$ формула верна. Пусть $a_k = a_1 + d(k-1)$. Тогда $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + kd$. Следовательно, формула верна для любого n.

Пример 358. Доказать, что в геометрической прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, ... со знаменателем q любой член $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Доказательство. Для $n = 1$ формула верна. Допустим, что она верна для $n = k$. Тогда $a_{k+1} = a_k q = a_1 q^{k-1} q = a_1 q^k$.

Значит, формула верна при любом n.

Пример 359. Доказать формулу

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \cdots + 2a_{n-1}a_n,$$

т. е. доказать, что квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной со всевозможными удвоенными произведениями членов, взятых по два.

Доказательство. При $n = 2$ формула справедлива, так как $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$. Предположим, что она справедлива для $n = k$, и докажем ее справедливость для $n = k + 1$. Обозначим $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$. Тогда можем написать

$$S_{k+1}^2 = (S_k + a_{k+1})^2 = S_k^2 + 2S_k a_{k+1} + a_{k+1}^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \cdots + 2a_{k-1}a_k + 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)a_{k+1} + a_{k+1}^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k+1}^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \cdots + 2a_ka_{k+1}.$$

Пример 360. Доказать формулу для числа различных перестановок

$$P_m = m!.$$

Доказательство. Из одного элемента можно сделать одну перестановку, т. е. $P_1 = 1 = 1!$. Таким образом, доказываемая формула верна для $m = 1$. Предположим, формула верна для $m = k$. Докажем ее справедливость для $m = k + 1$. Для доказательства возьмем из данных $(k + 1)$-го элемента $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ какие-нибудь k элементов и составим из них перестановку. В этой перестановке поставим оставшийся $(k+1)$-й элемент один и только один раз перед первым элементом перестановки, затем перед вторым и т. д., перед k-м и после k-го.

Таким образом, с помощью взятой перестановки из k элементов мы получим $(k + 1)$ перестановку из $(k + 1)$-го элемента. Поступая так же с каждой перестановкой из k элементов, взятых из данных $(k + 1)$ элементов, мы каждый раз будем получать $(k + 1)$ перестановку из $(k + 1)$-го элемента. А так как по предположению $P_k = k!$, то число полученных таким способом перестановок будет равно $k!(k + 1) = (k + 1)!$.

Остается выяснить, будет ли найденное число равно P_{k+1}, т. е. не будет ли среди полученных перестановок одинаковых и все ли различные перестановки вошли в это число. Допустим, что среди полученных перестановок есть одинаковые. Назовем их p_1 и p_2. Так как одинаковые перестановки имеют одинаковые элементы на одинаковых местах, то некоторый элемент a_l занимает одно и то же место как в p_1, так и в p_2. Пусть, например, это будет последнее, т. е. $(k + 1)$-е место. Удалим a_l из p_1 и p_2. Получим две одинаковые перестановки $\overline{p_1}$ и $\overline{p_2}$ по k элементов в каждой. Но это невозможно, потому что мы в каждой перестановке из k элементов ставили оставшийся $(k + 1)$-й элемент на последнее место один и только один раз.

Допустим, что некоторая перестановка p из $(k + 1)$-го элемента нашим способом не получена. Пусть, например, в ней элемент a_l стоит на последнем месте. Удалим a_l из p. Получим перестановку $\overline{p}$ из k элементов. Значит, чтобы получить перестановку p, нужно было взять перестановку $\overline{p}$ и в конце ее поставить элемент a_l. Но мы брали всевозможные перестановки из данных k элементов, в том числе и перестановку $\overline{p}$, не содержащую элемента a_l. Мы приписывали в конце каждой перестановки оставшийся $(k + 1)$-й элемент. Следовательно, мы приписывали в конце перестановки $\overline{p}$ элемент a_l, и поэтому перестановка p не может не быть среди полученных.

Итак, доказано: $P_{k+1} = (k + 1)!$. Следовательно, формула $P_m = m!$ верна при любом m.

Упражнения

344. * Могут ли числа $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ быть членами одной и той же арифметической или геометрической прогрессии?

345. Сколько нужно взять членов прогрессии 81, 78, 75, 72, ..., чтобы сумма их была равна нулю?

346. Найти $a_1 + a_6 + a_{11} + \cdots + a_{31}$, если известно, что $a_1, a_2, a_3, \ldots$ есть арифметическая прогрессия и что $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{31} = 784$.

347. Сколько одинаковых членов имеется в следующих арифметических прогрессиях 2, 5, 8, 11, , 302 и $-1, 3, 7, 11, \ldots, 399$?

348. В арифметических прогрессиях 4, 6, 8, 10, ... и 81, 77, 73, .. найти те члены, одинаково удаленные от начала, разность между которыми наименьшая.

349. Найти сумму n чисел вида 2, 22, 222, ...

350. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 7, а сумма квадратов тех же членов 21. Найти прогрессию.

351. Показать что если числа ab, b^2 и c^2 образуют арифметическую прогрессию, то числа b, c и $2b - a$ образуют геометрическую прогрессию.

352. Доказать, что последовательность $z_1, z_2, \ldots, z_n$, где $z_n = \cos nx + i \sin nx$, есть геометрическая прогрессия, и с помощью суммы n первых ее членов найти суммы: $A = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$ и $B = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$

353. Возможно ли, чтобы три числа a_1, a_2, a_3 были одновременно первыми, вторыми и третьими членами арифметической и геометрической прогрессии?

354. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 56, а сумма квадратов членов той же прогрессии равна 448. Найти прогрессию

355. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, зная, что сумма первых шести ее членов в семь раз больше суммы остальных членов этой прогрессии

356. Сколько различных натуральных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 1, 2, 2?

357. Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 7, 8, 9, 0?

358. Найти P_n, если $C_{n+1}^{n-1} = 10$.

359. Найти m и n, зная, что $C_m^{n-1} : C_m^n : C_m^{n+1} = 2 : 3 : 4$.

360. Сумма коэффициентов первого, второго и третьего членов разложения $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^n$ равна 11. Найти член, содержащий x^3.

361. Коэффициент третьего члена разложения $\left(x - \frac{1}{3}\right)^n$ равен 5. Найти средний член разложения.

362. Доказать, что наибольший коэффициент разложения $(x + a)^{2n}$ есть число четное.

363. Найти член разложения $(3x + 5)^{12}$ с наибольшим коэффициентом.

364. Найти коэффициент при x^3 в выражении

$$(1 + x)^3 + (1 + x)^4 + (1 + x)^5 + \cdots + (1 + x)^{15}.$$

Пользуясь методом математической индукции, доказать (365—375):

365. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

366. $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30} n (n + 1) (2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)$.

---

* Во всех задачах на прогрессии подразумевается, что члены прогрессии вещественные, если специально не оговорено противное.

367. $\frac{1}{1\,4}+\frac{1}{4\,7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.

368. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$.

369. $\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

370. $(1+i\sqrt{3})^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$.

371. $\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n\text{ двоек}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

372. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1)$.

373. $|\sin nx|\leqslant n|\sin x|$.

374. $A_m^n=m(m-1)\cdots(m-n+1)$.

375. $C_m^n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\,2\cdots n}$.

Приложение

Задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы в 1961—1967 гг.

I. Тождественные преобразования

Доказать, что если n натуральное число, то число a делится иа число b (1—5)

1. $a = 3^{4n+2} + 1$, $b = 10$.

2. $a = 2^{8n+6} + 1$, $b = 5$.

3 $a = 7^{2n} - 4^{2n}$, $b = 33$

4. $a = 5^{2n+3} + 3^{n+3}\,2^n$, $b = 19$.

5. $a = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, $b = 17$.

6. Делится ли число $7^{1025} + 1$ на 2, 4, 8, 16?

7. Доказать, что если натуральное число n не делится ни иа 2, ни иа 3, то $n^2 - 1$ делится на 24.

Доказать, что если n целое число, то число a делится иа число b (8—10)

8. $a = n^3 + 11n$, $b = 6$.

9. $a = n^3 + 20n$, $b = 48$; n — четное.

10. $a = n^5 - 5n^3 + 4n$, $b = 120$.

11. Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.

12. При каких a и α многочлен $x^3 + ax + 1$ делится на $x - \alpha$ без остатка и частное от этого деления положительно при всех x?

13. Доказать, что многочлен $nx^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1$ делится на $x^2 - 2x + 1$ без остатка.

14. Доказать, что выражение $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$, где m, n, p — натуральные числа, делится на $x^2 + x + 1$ без остатка.

15. Доказать, что многочлен $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ делится на $(x+1)^2$ без остатка.

16. Доказать, что многочлен $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ не делится без остатка на $(x - \alpha)^2$ ни при каком α.

17. Разложить на множители с рациональными коэффициентами

$$(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) + 2x^2.$$

18. Доказать, что выражение $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10$ положительно при всех вещественных значениях x.

19. Доказать справедливость равенства

$$4(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2) = (p^2 + q^2 + r^2)^2,$$

если $r = p + q$.

20. Доказать справедливость равенства

$$64p(p-a)(p-b)(p-c) = (a^2+b^2+c^2)^2,$$

если $a^2 = k^2 + m^2$, $b^2 = m^2 + n^2$, $c^2 = n^2 + k^2$, $k = m + n$, $2p = a + b + c$.

21. Доказать, что $|x+y| + |x-y| = 2M$, где x и y — вещественные числа, M — наибольшее из чисел $|x|$ и $|y|$.

22. Доказать, что если $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = p^2$, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = q^2$, $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = pq$ и все числа a_i и b_i $(i = 1, 2, 3)$ вещественны, то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{p}{q}.$$

23. Каким должно быть n, чтобы многочлен $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2}$ делился на $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$ без остатка?

24. Доказать, что если $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ и $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Упростить выражения (25 — 27):

25. $\dfrac{m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp}{(m-n)^2 + (n-p)^2 + (p-m)^2}$.

26. $\dfrac{(1 - 10x^3 + 5x^4)(5 - 30x^2 + 5x^4) + 20(5x - 10x^3 + x^5)(x - x^3)}{(5x - 10x^3 + x^5)^2 + (1 - 10x^2 + 5x^4)^2}$.

27. $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

Доказать равенства (28, 29).

28. $\dfrac{a^2x^2y^2 - a^2x^2 - y^2 + 1}{a^2xy - \dfrac{y}{x} + x\left(a^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)} + 1 = a^2$, если $x = a - 1$, $y = a + 2$.

29. $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \dfrac{2x(x-1)^2}{x^4 + x^2 + 1} + \dfrac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8 + x^4 + 1} = \dfrac{x^8 - x^4 + 1}{x^8 + x^4 + 1}$.

30. Доказать, что если x и y вещественные числа, то

$$|x+y| + |x-y| = |x + \sqrt{x^2 - y^2}| + |x - \sqrt{x^2 - y^2}|.$$

31. Доказать, что

$$\left|\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}\right| + \left|\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}\right| = |x| + |y|,$$

где x и y вещественные числа одного знака.

Упростить выражения (32 — 37):

32. $\sqrt[4]{x^3(x-12) + 54x(x-2) + 81} + \sqrt{-x|x|}$.

33. $\dfrac{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}$, если $x = 2am[b(1+m^2)]^{-1}$ и $0 < m < 1$.

34. $\dfrac{mn - \sqrt{m^2-1}\sqrt{n^2-1}}{mn + \sqrt{m^2-1}\sqrt{n^2-1}}$, если $2m = x + \dfrac{1}{x}$, $2n = y + \dfrac{1}{y}$ и $x < -1$, $y < -1$.

35. $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{ab^{-1}(x-1-ab^{-1})}+\sqrt{ba^{-1}(x-1-ba^{-1})}}$, если $x=(a^2+ab+b^2)(ab)^{-1}$ и $b>a>0$.

36. $\dfrac{3x^{(m-n)^2}-x^{-4mn}}{x^{(m-n)^2}-x^{-4mn}}$, если $x=\left[\dfrac{\sqrt[6]{a^r}+1}{\sqrt[6]{a^r}-1}\right]^{(m+n)^{-2}}$

37. $\left[\left(1+\sqrt[3]{x\sqrt{x}}\right)^3+\left(1-\sqrt[3]{x\sqrt{x}}\right)^3-2\left(x\sqrt{3}-1\right)^2\right]:x^2$, если $x=4\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)^{-1}$.

Доказать равенства (38—41):

38. $\dfrac{1+(x+\sqrt{x^2-1})^2(y+\sqrt{y^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})(y+\sqrt{y^2-1})}=2\left[xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right]$.

39. $\left[x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}(1-x^3)^{-0,5}+x^{-1,5}(1-x^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}=-\dfrac{b}{2a}$, если $x=(2a)^{-\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-b^2}}$ и $a>0$, $b<0$.

40. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2=\sqrt{\dfrac{3+2x}{3-2x}}$, если $x=\sqrt[4]{5}$.

41. $\dfrac{4x^3-3x+(4x^2-1)\sqrt{x^2-1}-1}{4x^3-3x+(4x^2-1)\sqrt{x^2-1}+1}=\dfrac{(2x+1)\sqrt{x-1}}{(2x-1)\sqrt{x+1}}$.

42. Вычислить сумму 2^x+2^{-x}, зная, что $4^x+4^{-x}=23$.

43. Проверить справедливость равенства

$$\log_a N\log_b N+\log_b N\log_c N+\log_c N\log_a N=\frac{\log_a N\log_b N\log_c N}{\log_{abc} N}.$$

Доказать равенства (44 — 61):

44. $3\sin^6 x-8\sin^6 x+6\sin^4 x+4\cos^6 x-3\cos^6 x=1$.

45. $2\sin^4 x-8\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x-6\sin^2 x\cos^2 x-3\cos^2 x+3=8\sin^6 x$.

46. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=2$.

47. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\beta}-\dfrac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

48. $\dfrac{\sin 26^\circ}{\sin 43^\circ\sin 17^\circ}+\dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 17^\circ\sin 2^\circ}=\dfrac{\sin 41^\circ}{\sin 43^\circ\sin 2^\circ}$.

49. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{3\alpha}{2}\right)}$.

50. $\dfrac{\cos\alpha\cos(2\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}+\sin^2\alpha=1-\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

51. $\dfrac{1}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\dfrac{1}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}+\dfrac{1}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=\dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}$.

52. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}x+4\operatorname{ctg}2x=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

53. $\operatorname{tg}7{,}5^\circ+\operatorname{tg}37{,}5^\circ+\operatorname{tg}7{,}5^\circ\operatorname{tg}37{,}5^\circ=1$.

54. $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)=\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

55. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{24}+\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi-\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}-\operatorname{ctg}\frac{3}{8}\pi=2(1+\sqrt{3})\sqrt{3}$.

56. $\sin^6\frac{\pi}{8}+\sin^6\frac{3\pi}{8}+\sin^6\frac{5\pi}{8}+\sin^6\frac{7\pi}{8}=\frac{5}{4}$.

57. $\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 36^\circ\cos 48^\circ\cos 60^\circ\cos 72^\circ\cos 84^\circ=\frac{1}{128}$.

58. $128\cos^{10}x(1+\operatorname{tg}^{10}x)=5\cos 8x+60\cos 4x+63$.

59. $\sin^3x\cos^5x=\frac{3}{64}\sin 2x+\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{64}\sin 6x-\frac{1}{128}\sin 8x$.

60. $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{3}=2\sin\frac{n\pi}{6}\sin\frac{(n+1)\pi}{6}$

61. $\frac{1}{\cos x+\cos 3x}+\frac{1}{\cos x+\cos 5x}+\frac{1}{\cos x+\cos 7x}=\frac{\operatorname{tg}4x-\operatorname{tg}x}{2\sin x}$

Упростить выражения (62, 63):

62. $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\ldots\cos\frac{\pi}{2^n}$.

63. $\cos\frac{1\cdot 180^\circ}{n}+\cos\frac{2\cdot 180^\circ}{n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)180^\circ}{n}$.

Вычислить, не пользуясь таблицами (64 — 66):

64. $\cos 40^\circ\sin 70^\circ\cos 80^\circ$

65 $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ$.

66. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}+\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{12}+\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{12}$.

67. Вычислить $32\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5}{2}x$, зная, что $4\cos x=3$.

68. Дано: $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$ Найти $\alpha+\beta$

69. Найти величину произведения $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma$, зная, что $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\gamma$ образуют арифметическую прогрессию и что $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$

II. Уравнения

Решить уравнения (70—72):

70. $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$.

71. $|x^2-9|+|x^2-4|=5$.

72. $|x^2-1{,}5x-1|=-x^2-4x+\beta$ (x, β — вещественные числа)

73. Определить m так, чтобы уравнение $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$ имело вещественные корни разных знаков.

74. Определить m так, чтобы оба корня уравнения $(x-1)(x-3)+m(x-2)(x-4)=0$ были положительными.

75. Определить m так, чтобы оба корня уравнения $x^2 - 2mx + m^2 = 1$ находились между числами -2 и 4

76. При каких a сумма корней уравнения $ax^2 + x - 8a + 4 = 0$ меньше 1, а их произведение больше a?

77. Определить k так, чтобы каждый корень уравнения $x^2 - (k+3)x + k + 3 = 0$ был меньше 0,5

78. Решить квадратное уравнение $(4a + 12)x^2 + 12x + a - 5 = 0$, зная, что оно имеет равные корни.

79. Найти такое значение a, при котором один из корней уравнения $x^2 - 3x + a = 0$ втрое меньше какого-нибудь корня уравнения $x^2 - 5x - 3a = 0$.

80 При каких значениях α уравнение $2x^2 - 2(2\cos\alpha - 1)x + 2\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 2 = 0$ имеет два различных вещественных корня, если $0 < \alpha < \pi$?

81 При некотором m уравнение $\dfrac{2x^2 - x}{2x^2 - 5x + 2} - \dfrac{63x^2 - 84x + 28}{(21x - 14)(2x - 3)} + \dfrac{mx}{4x - 5} + \dfrac{12 - 6x}{3x^2 - 12x + 12} = \dfrac{3m + 9}{2}$ удовлетворяется только одним значением x Найти это m

82 Один из корней уравнения $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ с рациональными коэффициентами равен $1 + \sqrt{3}$. Найти a и b.

Решить уравнения (83—106):

83 $(x-3)(x-4)(x-7)(x-8) = 60$

84 $(9a + b - x)^2 + (a + 5b - 3x)^2 = (7a - b + x)^2 + (7a + 3b - 5x)^2$.

85 $(a-x)^3(x-b)^2 + (a-x)^2(x-b)^3 = a^2b^2(a-b)$

86. $\dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{2}{2+3x} + \dfrac{3}{3+4x} - \dfrac{4}{4+5x} = 0$.

87. $\dfrac{2}{x+8} + \dfrac{5}{x+9} = \dfrac{3}{x+15} + \dfrac{4}{x+6}$.

88 $\dfrac{a(c-d)}{x+a} + \dfrac{d(a-b)}{x+d} = \dfrac{b(c-d)}{x+b} + \dfrac{c(a-b)}{x+c}$; $a > b > c > d > 0$.

89 $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{x-4}{x+4}$.

90. $\dfrac{2(3x-4)}{2x+1} + \dfrac{9(x-1)}{3x+1} = \dfrac{2(3x-2)}{2x+3} + \dfrac{3(x-2)}{x-1}$.

91 $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1} + \dfrac{x^2+8x+20}{x+4} = \dfrac{x^2+4x+6}{x+2} + \dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$.

92. $\dfrac{(a-2x)^2 - (x-2b)^2}{(a+2x)^2 - (x+2b)^2} = \left(\dfrac{a+2b-3x}{a-2b+x}\right)^2$; $a > 0$, $b > 0$.

93. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right)$

94 $\dfrac{2x}{4x^2+3x+8} + \dfrac{3x}{4x^2-6x+8} = \dfrac{1}{6}$.

95. $x\sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 2} = b$

96. $x + \sqrt{x^2 - 4} = a$

97. $6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$.

98. $(a+x)\sqrt{b+x}-(b+x)\sqrt{a-x}=ab\left(\frac{1}{\sqrt{b+x}}-\frac{1}{\sqrt{a-x}}\right)$, $a>0$, $b>0$

99. $(x+\sqrt{x^2-a})^4\,(x-\sqrt{x^2-a})=b$.

100. $\frac{(a-x)\sqrt{b+x}+(b+x)\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}}=\sqrt{ab}$; $b>0$.

101. $\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}}=\frac{a-b}{a+b-2x}$.

102. $|z|+z=\sqrt{3}+i$.

103. $|z|^2-2iz+2a(1+i)=0$; $a\geqslant 0$

104 $z+a|z+1|+i=0$; $a\geqslant 1$

105. $2|z|-4az+1+ia=0$; $a\geqslant 0$

106. $z|z|+az+i=0$; $a\geqslant 0$

Решить системы уравнений (107—112):

107. $\begin{cases} y-2|x|+3=0; \\ |y|+x-3=0. \end{cases}$

108 $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=152; \\ xy=44. \end{cases}$

109 $\begin{cases} x^2(y^2-3)+xy=-1; \\ x^2(3y^2-6)+xy=-2. \end{cases}$

110. $\begin{cases} x+xy+y=0; \\ x^3+x^3y^3+y^3=12. \end{cases}$

111. $\begin{cases} x+y=2; \\ x^4+y^4=\frac{41}{8}. \end{cases}$

112. $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=5; \\ (x+y)(x^2-y^2)=9. \end{cases}$

Найти вещественные решения уравнений (113, 114):

113. $\begin{cases} x^6+8y^6=9x^3y^2; \\ x+2y=12. \end{cases}$

114 $\begin{cases} x^3-ay^3=\frac{1}{2}(a+1)^2; \\ x^3+ax^2y+xy^2=1; \\ x+y=0; \end{cases}$ a — вещественное число.

115. Исключить x и y из уравнений

$$y^2-x^2=ay-bx,\quad 4xy=ax+by;\quad x^2+y^2=1.$$

116 Исключить x, y и z из уравнений

$$x^2(y+z)=a^2;\quad y^2(z+x)=b^2;\quad z^2(x+y)=c^2;\quad xyz=abc.$$

117. Найти все вещественные значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} xyz + z = a; \\ xyz^2 + z = b; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное вещественное решение.

118 Доказать, что если вещественные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x(y+z) = (x^2-1)yz; \\ x^2 = yz \end{cases}$$

и $x \neq 0$, то $|x| \geqslant \sqrt{3}$.

Решить системы уравнений (119 — 122):

119 $$\begin{cases} \frac{x}{y}(x^2+y^2) = 6; \\ \frac{y}{x}(x^2-y^2) = 1 \end{cases}$$

120. $$\begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}; \\ 4x + y = 32 \end{cases}$$

121. $$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 2\sqrt{2}; \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2. \end{cases}$$

122. $$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{65}{8}; \\ x + y = 34. \end{cases}$$

123 Из пункта A в пункт B одновременно отправились две группы туристов Первая группа выехала на автобусе, идущем со скоростью 20 *км/ч*, и, доехав до пункта C, расположенного посередине между A и B, дальше пошла пешком Вторая группа сначала пошла пешком, но через час села на попутную машину, идущую со скоростью 30 *км/ч*, и доехала на ней до пункта B Первая группа миновала пункт C на 35 *мин* раньше второй, а в пункт B прибыла на 1 *час* 25 *мин* позже второй группы Каково расстояние между пунктами A и B, если при движении пешком первая группа проходит в час на 1 *км* больше, чем вторая?

124. Две машинистки должны перепечатать рукопись, состоящую из трех глав, из которых первая вдвое короче второй и втрое длиннее третьей. Работая вместе, машинистки перепечатали первую главу за 3 *час* 36 *мин* Вторая глава была перепечатана за 8 *час*, из которых 2 *час* работала только первая машинистка, а остальное время они работали вместе Какое время потребуется второй машинистке, чтобы одной перепечатать третью главу?

125. Поступающие сдавали четыре экзамена. 20% общего числа подавших заявления получили «неудовлетворительно» на первом экзамене, а 90% выдержавших первый экзамен сдали и второй. На третьем экзамене отсеялась $\frac{1}{18}$ часть оставшихся после второго экзамена да еще 5 человек. Наконец, $\frac{8}{9}$ от числа выдержавших третий экзамен получили положительные оценки и на четвертом. В результате оказалось, что число сдавших все экзамены вдвое больше числа мест, выделенных для приема, а число мест в полтора раза больше, чем число получивших «неудовлетворительно» на первом экзамене Сколько заявлений было подано?

126. Расстояние между пунктами A и C равно 30 *км* Из A по направлению к C вышел лыжник, двигающийся со скоростью 10 *км/ч* Через 15 *мин* ему навстречу должен был выйти из C другой лыжник с тем, чтобы, двигаясь с постоянной скоростью, встретиться с первым на середине пути от A к C. Однако второй лыжник вышел с опозданием против намеченного срока на 55 *мин*, вследствие чего встреча произошла в другом месте — пункте B. Чему равно расстояние от A до B?

127. Если пароход и катер плывут по течению, то расстояние от пункта A до пункта B пароход проходит в полтора раза быстрее, чем катер, при этом катер каждый час отстает от парохода на 8 *км* Если же они плывут против течения, то пароход проходит путь от B до A в два раза быстрее катера. Найти скорости парохода и катера в стоячей воде

128. Два туриста вышли из пункта A по направлению к пункту B одновременно, причем первый проходит каждый километр пути на 5 *мин* быстрее второго. Первый турист, пройдя пятую часть пути, вернулся в A и, пробыв там 10 *мин*, снова пошел в B. Однако в B оба туриста пришли одновременно Каково расстояние от A до B, если второй турист прошел его за 2,5 *час*?

129. Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два автобуса, причем первый, имея вдвое большую скорость, прошел весь путь на 1 *час* быстрее второго На сколько минут раньше произошла бы их встреча, если бы скорость второго автобуса была равна скорости первого?

130. Пункт C расположен в 12 *км* от пункта B вниз по течению реки Рыбак отправился на лодке в пункт C из пункта A, расположенного выше B Через 4 *час* он прибыл в C, а на обратный путь затратил 6 *час* Поставив на лодку мотор и тем самым увеличив собственную скорость лодки относительно воды втрое, рыбак дошел от пункта A до пункта B за 45 *мин* Найти скорость течения реки, считая ее постоянной

131. Из пункта A через равные промежутки времени отправляются по одной и той же дороге в пункт C три автомашины Через некоторое время все они одновременно проезжают пункт B, находящийся между A и C В пункт C первая автомашина прибывает через час после второй Третья автомашина немедленно по прибытии в C поворачивает и едет назад и в 40 *км* от C встречает первую автомашину Найти скорость первой автомашины, считая ее постоянной, если расстояние от B до C равно 120 *км*

132. Два товарища, имея один велосипед, одновременно направились из пункта A в пункт B, причем первый из них поехал на велосипеде, а второй пошел пешком. На некотором расстоянии от A первый оставил велосипед на дороге и дошел до B пешком Второй, дойдя до велосипеда, поехал дальше на нем Оба товарища прибыли в B одновременно На обратном пути из B в A они поступили точно так же, только первый проехал на велосипеде на один километр больше, чем в первый раз Из-за этого второй приехал в A на 21 *мин* позже, чем туда дошел первый Определить скорость ходьбы каждого из товарищей, если на велосипеде они едут с одной и той же скоростью 20 *км/ч*, а при ходьбе первый затрачивает на каждый километр на 3 *мин* меньше, чем второй.

133. На участке AB скорость течения реки постоянна, а на участке BC она столь незначительна, что ее можно считать равной нулю. Лодочник проплывает на лодке расстояние от A до C (по течению, собственная скорость лодки постоянна) за 3 *час* 20 *мин*, а на возвращение обратно тратит 4 *час* Если бы на участке BC скорость течения реки была такой же, как и на участке AB, то на весь путь от A до C лодочнику потребовалось бы 3 *час*. За сколько времени он при этом предположении о скорости течения вернулся бы обратно?

134. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 525 *км*, выехал мотоциклист Через некоторое время из B в A вышла автомашина, которая встретилась с мотоциклистом в тот момент, когда он проехал $\frac{3}{7}$ расстояния от A до B Мотоциклист и автомашина продолжали двигаться

дальше, и мотоциклист приехал в B через 3 *час* после того, как автомашина прибыла в A Если бы автомашина выехала из B на 1,5 *час* раньше, чем в действительности, то она встретилась бы с мотоциклистом на расстоянии 180 *км* от A. Найти скорость мотоциклиста, считая движение мотоциклиста и автомашины равномерным

135. Из трех элементов A, B и C составлены три смеси В первую смесь входят только элементы A и B в весовом отношении 3 5, во вторую — только элементы B и C, в весовом отношении 1 2, а в третью — только элементы C и A в весовом отношении 3 2 В каком отношении нужно взять эти три смеси, чтобы во вновь полученной смеси элементы A, B и C содержались в весовом отношении 3 5 2?

136. Три пловца должны проплыть из A в B и обратно Сначала стартует первый, через 5 *сек* — второй, еще через 5 *сек* — третий На пути от A к B все пловцы прошли некоторую точку C одновременно Третий пловец, доплыв до B и сразу повернув назад, встречает второго в 9 *м* от B, а первого в 15 *м* от B Найти скорость третьего пловца, если расстояние между A и B равно 55 *м*

137. Из пункта A в пункт B выходит пешеход и одновременно навстречу ему из пункта B выезжает велосипедист Пройдя $3\frac{1}{3}$ *км*, пешеход сел в попутную машину и встретил велосипедиста посередине между A и B. Если бы пешеход не воспользовался машиной, то, для того чтобы встретиться с велосипедистом на том же месте, он должен был бы выйти из A на 2 *час* 40 *мин* раньше, чем велосипедист выехал из B Если бы машина выехала из A на 1 *час* 04 *мин* позднее велосипедиста из B, то их встреча произошла бы на расстоянии 15 *км* от A Найти скорости пешехода, велосипедиста и машины, если расстояние между A и B равно 40 *км*

138. Три бригады, работая одновременно, выполняют норму по изготовлению деталей за некоторое число часов Если бы первые две бригады работали в два раза медленнее, а третья бригада — в четыре раза быстрее, чем обычно, то норма была бы выполнена за то же время. Известно, что первая и вторая бригады при совместной работе выполняют эту же норму в два раза быстрее, чем вторая бригада совместно с третьей Во сколько раз первая бригада делает деталей за один час больше, чем третья?

139. Из двух жидкостей, удельные веса которых 2 $\frac{Г}{см^3}$ и 3 $\frac{Г}{см^3}$, составлена смесь Сколько граммов взято каждой жидкости и каков удельный вес смеси, если 4 $см^3$ смеси весят в 10 раз меньше, чем вся первая жидкость, входящая в смесь, а 60 $см^3$ смеси весят столько же, сколько вся вторая жидкость, входящая в ту же смесь? Предполагается, что объем смеси равен сумме объемов ее составных частей

140 Даны вещества A, B и C с различными удельными весами Из них составлены три смеси первая — из равных объемов B и C; вторая — из равных объемов C и A, третья — из равных объемов A и B Удельные веса этих смесей находятся в отношении $7 \cdot 6 \cdot 3$ Узнать, во сколько раз удельный вес вещества C больше удельного веса вещества B Объем смеси предполагается равным сумме объемов ее составных частей

141. Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка — в 2 раза дешевле, а книга — в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 8 руб. Если бы по сравнению с первоначальной ценой портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка — в 4 раза дешевле, а книга — в 3 раза дешевле, то за ту же покупку школьник уплатил бы 12 руб Сколько стоит покупка и за что больше уплачено — за портфель или авторучку?

142. Два одинаковых сосуда наполнены спиртом Из первого сосуда отлили a *л* спирта и налили в него столько же воды Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили a *л* и налили столько же литров воды Из

второго сосуда отлили 2 *а л* спирта и налили в него столько же литров воды Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили 2 *а л* и налили столько же литров воды Какую часть объема сосуда составляет *а л*, если крепость окончательной смеси в первом сосуде в $\frac{25}{16}$ раза больше крепости во втором сосуде?

143. Для того чтобы из пункта *A* попасть в пункт *B*, нужно часть пути от пункта *A* до пункта *C* проехать на поезде, а остальные 15 *км* от *C* до *B* — на автобусе. Вся эта поездка от *A* до *B* занимает 1 *час* 15 *мин*, причем автобус отправляется сразу же после прихода поезда, а временем, которое тратят поезд и автобус на остановки, можно пренебречь. По ошибке пассажир сошел с поезда на остановку раньше, прошел оставшийся путь до *C* длиною 5 *км* со скоростью 4 *км/ч*, а затем еще 20 *мин* ждал автобуса, и в результате прибыл в пункт *B* на 1 *час* 30 *мин* позже намеченного срока. Найти расстояние от *A* до *C*, если известно, что скорость поезда вдвое больше скорости автобуса

144. Три насоса, качающие воду для поливки, начали работать одновременно Первый и третий насосы закончили работу одновременно, а второй — через 2 *час* после начала работы В результате первый насос выкачал 9 $м^3$ воды, а второй и третий — в сумме 28 $м^3$. Какое количество воды выкачивает за час каждый насос, если известно, что третий насос за час выкачивает на 3 $м^3$ больше, чем первый, и что три насоса, работая вместе, выкачивают за час 14 $м^3$?

145. Две суммы денег — всего 5000 руб — положены на некоторые сроки в сберкассу из расчета 3 % годовых При этом проценты начисляются от первоначальной суммы в момент выдачи вклада пропорционально времени пребывания вклада в сберкассе. Каждая из этих сумм дала 60 руб дохода. Первая сумма находилась в сберкассе на четыре месяца меньше, чем вторая. Как велика каждая сумма и на какой срок она была положена в сберкассу?

146. Если пассажир сядет в поезд в городе *A*, то он доберется до города *B* через 20 *час*. Если же он дождется отправления самолета (а ждать придется больше 2 *час*) и полетит самолетом, то он попадет в *B* через 10 *час* после ухода поезда Во сколько раз скорость самолета больше скорости поезда, если известно, что самолет догоняет поезд через $\frac{8}{9}$ *час* после вылета? При этом предполагается, что самолет летит вдоль железной дороги и проходит по воздуху то же расстояние, что и поезд по земле

147. Из города *A* в город *B* выехала машина с почтой Через 20 *мин* по тому же маршруту выезжает вторая машина, скорость которой 45 *км/ч*. Она догоняет первую и, передав забытый пакет, возвращается обратно В тот момент, когда первая машина прибыла в город *B*, вторая достигла лишь середины пути от места встречи ее с первой машиной до города *A* Найти скорость первой машины, если расстояние между *A* и *B* равно 40 *км*

148. Из пунктов *A* и *B*, расстояние между которыми 60 *км*, должны были выйти одновременно навстречу друг другу два пешехода Однако второй пешеход задержался в *B* и вышел с опозданием Пешеходы встретились в 20 *км* от *B* и после встречи продолжали идти каждый в свою сторону. Первый пешеход пришел в *B* раньше, чем второй в *A*, причем время между прибытием первого пешехода в *B* и прибытием второго пешехода в *A* вдвое превысило то время, на которое второй пешеход задержался в *B* после выхода первого пешехода из *A* На другой день пешеходы вышли навстречу друг другу одновременно из тех же пунктов и встретились через 6 *час* 40 *мин*. Найти скорость первого пешехода

149. Два приятеля собрались на охоту. Один из них живет в 46 *км* от охотничьей базы, а другой, имеющий машину, в 30 *км* от базы (между базой и домом первого приятеля) Они тронулись в путь одновременно, причем владелец машины поехал навстречу своему приятелю, идущему пешком. Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после

выхода из дома. Если бы пешеход вышел из дома на 2 *час* 40 *мин* раньше владельца машины, то приятели встретились бы в 11 *км* от дома пешехода. Какова скорость машины? Все скорости считаются постоянными

150. Из города A в город B через равные промежутки времени и с одинаковыми скоростями выезжает один за другим 21 автобус, каждый из которых проходит путь AB за 2 *час* 40 *мин* При этом первый автобус прибывает в город B в тот момент, когда из города A выезжает 21-й автобус. Каждый автобус, прибыв в город B, сразу же поворачивает и движется обратно к городу A. Из города A одновременно с 21-м автобусом выезжает в город B легковая машина, которая через t *мин* обгоняет 20-й автобус. Найти t и то время, за которое легковая машина преодолевает расстояние AB, если от момента встречи ее с первым автобусом до встречи со вторым прошло $(t-9)$ *мин* Автобусы занумерованы в том порядке, в каком они выезжают из города A.

151. Из одного пункта одновременно и в одном направлении выехали два велосипедиста, первый со скоростью a *км/ч*, а второй со скоростью b *км/ч*. Через полчаса в том же направлении и из того же пункта выехал третий велосипедист, который, после того как обогнал первого велосипедиста, находился в пути еще полтора часа, пока догнал второго Найти скорость третьего велосипедиста

152. Две группы туристов отправились одновременно на байдарках по реке навстречу друг другу: первая из пункта A против течения, вторая из пункта B по течению. Первая группа, встретившись со второй в пункте C, повернула назад. Дальнейший путь обе группы проделали вместе, плывя со скоростью второй группы. Через 1,5 *час* после отправления из начальных пунктов обе группы прибыли в пункт D, который находится от пункта B на расстоянии 15 *км* Если бы первая группа отправилась в путь на 1 *час* раньше второй, то встреча произошла бы посередине между пунктами A и B. Найти скорости движения первой и второй групп, считая их постоянными, и расстояние от пункта C до пункта A, если расстояние между пунктами A и B равно 20 *км*

153. Поле площадью 980 *га* было обработано тремя бригадами, работавшими последовательно одна за другой, причем каждая бригада затратила на работу свое число дней Первая бригада обработала 70 *га*, вторая 280 *га*, а третья — остальную часть поля. Если бы первая бригада работала столько дней, сколько вторая, а вторая — сколько первая, то они обработали бы одинаковую площадь. Если бы вторая бригада работала столько дней, сколько третья, а третья — сколько вторая, то они также обработали бы одинаковую площадь. Сколько дней работала каждая бригада, если известно, что три бригады, работая одновременно, могут обработать все поле за 14 дней?

154. Два туриста вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились в 4 *км* от пункта B. Продолжая движение и достигнув соответственно пунктов B и A, туристы сразу же повернули обратно. На обратном пути они снова встретились, но уже в 2 *км* от пункта A. Эта вторая встреча произошла через 2 *час* после первой. Найти скорости движения туристов и расстояние между пунктами A и B

155. Из пункта A в направлении к пункту C выезжает автомашина. Одновременно с ней, но из пункта B, лежащего между A и C, также в направлении к пункту C выезжает автобус. Автомашина через 12 *мин* достигает пункта B и, продолжая движение, догоняет автобус на расстоянии 50 *км* от пункта A. Если бы скорость автобуса была увеличена на 20 *км/ч*, то автомашина догнала бы его на расстоянии 100 *км* от пункта A. Найти скорость автомашины.

156. Из пункта A в пункт B выходит автомашина и одновременно из B в A с меньшей скоростью выезжает мотоцикл. Через некоторое время они встречаются, и в этот момент из B в A выезжает второй мотоцикл, который встречается с автомашиной в пункте, отстоящем от места встречи автомаши-

ны с первым мотоциклом на расстоянии, равном $\frac{2}{9}$ пути от A до B. Если бы скорость автомашины была на 20 *км/ч* меньше, то расстояние между пунктами встречи равнялось бы 72 *км* и первая встреча произошла бы через 3 *час* после выхода автомашины из пункта A. Найти расстояние между пунктами A и B, если скорости мотоциклов одинаковы

157. Русло реки разделяется длинной отмелью на две протоки одинаковой длины, но с разной скоростью течения Две байдарки, имеющие одинаковую скорость в стоячей воде, выходят одновременно по течению первая в левую протоку, вторая — в правую Первая байдарка прошла свою протоку на 5 *мин* быстрее, чем вторая Затем они поднялись против течения теми же протоками, и при этом вторая байдарка прошла свой путь на 30 *мин* быстрее, чем первая Если бы скорость байдарок в стоячей воде была в два раза больше, то обратный путь вторая байдарка прошла бы на 4 *мин* быстрее, чем первая За какое время первая байдарка прошла свою протоку, идя вниз по течению?

158. Туристы вышли на лодке из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению Первую половину пути они шли на веслах, а потом включили мотор и прибыли в пункт B через 4 *час* после выхода из A. Если бы весь путь из A в B они шли на веслах, то он занял бы у них 5 *час* 20 *мин* На обратном пути, из B в A, они четверть пути шли на веслах, а затем включили мотор и прибыли в пункт A через 7 *час* после выхода из B Сколько времени занял бы у них обратный путь, если бы весь этот путь они шли на веслах?

159. Из пункта P выходят три разные дороги, ведущие в пункты A, B и C От A до P — 100 *км*, от B до P — 20 *км* Группа туристов направилась из пункта A в пункт B через пункт P. От A до P они ехали на машине, в P высадились и до B шли пешком. Машина же, высадив их, немедленно направилась в пункт C Здесь на нее сразу же села вторая группа туристов и поехала через пункт P в пункт B, куда и прибыла одновременно с первой группой Продолжая путешествие, первая группа прошла из B через P в C пешком, при этом время движения оказалось на 6 *час* 40 *мин* больше, чем время проезда из A в P и перехода из P в B вместе. Из C в A эта группа возвратилась через пункт P на машине, затратив на переезд 5 *час* Найти расстояние между C и P Скорость движения машины, как и скорость движения пешеходов, предполагается постоянной

160. В бассейн проведены две трубы Первая из них пропускает в минуту 18 $м^3$ воды В субботу для наполнения бассейна первую трубу включили на 20 *мин* позже второй После наполнения бассейна оказалось, что через первую трубу в бассейн налилось вдвое меньше воды, чем через вторую. В воскресенье для наполнения бассейна обе трубы включили одновременно И в субботу, и в воскресенье трубы были выключены, как только бассейн был наполнен Найти объем бассейна, если вторая труба в воскресенье работала на 12 *мин* меньше, чем в субботу.

161. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B первый пошел из A в B, второй — из B в A Каждый идет с постоянной скоростью без остановок и, придя в свой конечный пункт, немедленно поворачивает обратно Когда они встретились во второй раз, то оказалось, что первый пешеход прошел на 4 *км* больше, чем второй. Продолжая идти дальше, первый прибыл в A через 1 *час* после второй встречи, а второй в B — через 2,5 *час* после этой встречи Найти скорость первого пешехода.

162. Цистерну наполняли водой в течение 5 *час*. При этом в каждый следующий час поступление воды в цистерну уменьшалось в одно и то же число раз по сравнению с предыдущим Оказалось, что в первые 4 *час* было налито воды вдвое больше, чем в последние 4 *час*. Найти объем цистерны, если за первых два часа в нее было налито 48 $м^3$ воды.

163. Расстояние между городами A и B пассажирский поезд проходит на 4 *час* быстрее товарного поезда. Если бы каждый из поездов шел то время, которое тратит другой поезд на путь от A до B, то пассажирский поезд прошел бы на 280 *км* больше, чем товарный Если бы скорость каждого поезда была увеличена на 10 *км/ч*, то пассажирский поезд проходил бы расстояние AB на 2 *час* 24 *мин* быстрее товарного Найти расстояние между городами A и B.

164. Города A и B расположены на берегу реки, причем B расположен ниже по течению В 9 *час* утра из A в B отправляется плот, плывущий относительно берегов со скоростью течения реки. В этот момент из B в A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 *час* Доплыв до A, лодка сразу же повернула обратно и приплыла в B одновременно с плотом Успели ли лодка и плот прибыть в город B к 9 *час* вечера (того же дня)?

165. Из пунктов A и B навстречу друг другу выезжают одновременно два автобуса и встречаются в 12 *час* дня. Если скорость первого автобуса увеличить в два раза, а скорость второго оставить прежней, то встреча произойдет на 56 *мин* раньше Если же, наоборот, увеличить в два раза скорость второго автобуса, оставив прежней скорость первого, то встреча произойдет на 65 *мин* раньше. Определить время встречи автобусов в том случае, когда будут увеличены вдвое скорости обоих автобусов

166. Пассажир, опоздавший на t *час* на свой поезд, решил сначала догнать его на такси, однако через некоторое время пересел на автобус, заплатив за билет a руб., и прибыл на одну из станций одновременно с поездом Между тем он обнаружил, что если бы продолжал ехать на такси, то догнал бы поезд на τ *час* раньше, истратив при этом на b руб меньше. Какова скорость поезда, если скорость такси v_1 *км/ч*, автобуса v_2 *км/ч*, а стоимость проезда на такси равна b руб за 1 *км*?

167. Города A и B расположены на берегу реки, причем A находится ниже по течению. Из этих городов выходят одновременно навстречу друг другу две лодки, которые встречаются посередине между A и B После встречи, продолжая двигаться в прежних направлениях, лодки, достигнув соответственно городов B и A, сразу же поворачивают назад и снова встречаются, но уже на расстоянии 20 *км* от места первой встречи Если бы те же лодки, выйдя одновременно из городов A и B, поплыли против течения, то лодка, вышедшая из A, догнала бы лодку, вышедшую из B, в 150 *км* от B Найти расстояние между городами A и B

Решить уравнения (168—185):

168 $0{,}5 \lg \sqrt[3]{x^2} = 0$, (3) $\lg(\sqrt{1+x} - 1) = \lg \sqrt[3]{x-40}$.

169. $\dfrac{\lg(2x)}{\lg(4x-15)} = 2$.

170. $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4\log_4 x - 2} = 4$.

171. $\log_3 a - \log_x a = \log_{\frac{x}{3}} a$

172. $\sqrt{[\log_9 (9x^8)] \log_3 (9x)} = \log_3 x^3$

173. $2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \log_2 (2\sqrt{2}\, x) = 1$.

174. $\sqrt{2\left[\log_2 \left(\dfrac{x^2}{64}\right) - 1\right][2 + \log_4 (8x)]} = \log_2 (2x)$.

175. $x + \lg(1 + 2^x) = x \lg 5 + \lg 6$

176 $\lg(2^{2\sqrt{x+1}} - 4^{1+0{,}5x} + 1) = 0$.

177. $\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x$.

178. $\log_3(3^x-1)\log_3(3^{x+1}-3)=6$.

179. $3\cdot 3^{\log_3 3}\, x^{\log_3(9x)+1}=1$.

180. $2^{x+1}+1=3\cdot 2^{\frac{2x}{3}}$.

181. $2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=1$.

182. $3^{1-x}-3^{1+x}+9^x+9^{-x}=6$.

183. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\frac{101}{10(2-\sqrt{3})}$.

184. $144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0$; a — вещественное число

185. $9^{-|x-2|}-4\cdot 3^{-|x-2|}-a=0$; a — вещественное число.

Решить системы уравнений (186 — 192):

186. $\begin{cases}\log_5 x+3^{\log_3 y}=7;\\ x^y=625^5.\end{cases}$

187. $\begin{cases}5\log_x a+3\log_y a=0;\\ x^2-4y^5=0;\end{cases}\qquad a\neq 1.$

188. $\begin{cases}2+\log_{0,5} y=\log_2(y-x);\\ x^2+y^2=25.\end{cases}$

189. $\begin{cases}\dfrac{\log_x 0{,}5}{\log_x 0{,}5+\log_y 0{,}5}=\dfrac{1}{\log_y 0{,}125};\\ x+y=1.\end{cases}$

190. $\begin{cases}\log_{3x-4y-15}(2x-y)=1;\\ \log_{x+2y}\cos\pi(x+y)=0\end{cases}$

191. $\begin{cases}|\log_2(x+y)|+|\log_2(x-y)|=3;\\ xy=3.\end{cases}$

192. $\begin{cases}2x^4=y^4+z^4;\\ xyz=8;\end{cases}$

$\log_y x$, $\log_z y$, $\log_x z$ образуют геометрическую прогрессию

193. Найти все вещественные значения a, при которых система

$$\begin{cases}2^{|x|}+|x|=y+x^2+a;\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

имеет единственное вещественное решение.

194. Найти все вещественные значения a и b, при которых система

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right|=a;\\ x^2+y^2=b\end{cases}$$

имеет единственное вещественное решение. При этом $x>0$.

195. Какими должны быть вещественные значения a, чтобы при этих a и любых вещественных значениях b система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)y = 2; \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

имела хотя бы одно вещественное решение?

196. Какими должны быть вещественные значения a, чтобы при этих a и любых вещественных значениях b система

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)\,by^2 = a^2; \\ (a-1)\,x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имела хотя бы одно вещественное решение?

Решить уравнения (197—267):

197. $\cos^2 x + \cos^2 \frac{3}{4}x + \cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{4} = 2.$

198. $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}.$

199. $\cos 3x \cos 4x + \sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x).$

200. $1 - \sin^4 x - \frac{5}{3}\cos^4 x = 0.$

201. $8\cos^4 x - \cos 4x = 1.$

202. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right).$

203. $\sin\left(2x + \frac{5}{2}\pi\right) - 3\cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = 1 + 2\sin x.$

204. $\cos^2(x-\gamma) + \cos^2(0{,}5x + \beta - \gamma) -$

$- 2\cos(0{,}5x - \beta)\cos(x-\gamma)\cos(0{,}5x + \beta - \gamma) = \frac{3}{4}.$

205. $4\sin^3 x \cos x - 3\sin x \cos^3 x + 5\cos^3 x - 6\cos x = 0.$

206. $(\cos 5x + \cos 7x)^2 = (\sin 5x + \sin 7x)^2.$

207. $\sin(x-1) = \sin x - \sin 1$

208. $4\sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x.$

209. $\sin 2x \sin 4x \sin 6x = \frac{\sin 4x}{4}$

210. $\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1.$

211. $(1 + \sin x)(1 - 2\sin x)^2 = (1 - \cos x)(1 + 2\cos x)^2.$

212. $4\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos 2x.$

213. $\sin 5x = 16\sin^5 x.$

214. $\sin x - \cos x = 4\sin x \cos 2x.$

215. $3\sin x + 4\cos x = 5.$

216. $2\sin 17x + \cos 7x = \sqrt{3}\sin(\pi + 7x).$

217. $3\sin x + 4\cos x - 5\sin 7x = 0$

218. $5 \sin 2x + 12 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 13 \sin 6x = 0.$

219. $(\sin x - \cos x)^2 + \sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}.$

220. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}.$

221. $(\cos x - \sin x)^2 = \cos x + \sin x$

222. $\sin^3 x + \sin x \cos x + \cos^3 x = 1$

223. $5(1 - \sin 2x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0.$

224 $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

225 $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x.$

226. $\sin 2x \cos 5x - \sin 3x \cos 4x = 1.$

227. $\sin 3x \cos 10x = 1$

228. $\sin 4x - \cos 4x = 1 - 4(\cos x - \sin x).$

229. $\sin x \sin 3x \sin 5x = 1$

230. $\cos 6x + \cos 4x + \cos 2x + 0{,}5 = 0.$

231. $\sin^{25} x + \cos^{27} x = 1$

232 $\sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$

233. $4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = a$

234 $\sin^8 x + \cos^8 x = a$

235. $2 \sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{6} = x^2 + \frac{1}{x^2}.$

236 $a^2 - 2a + \sec^2 \pi (a + x) = 0.$

237. $8 \cos x = \sqrt{3} \operatorname{cosec} x + \sec x.$

238 $2(\sin x + \cos x)^2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$

239 $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 16 \cos 2x$

240. $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2 \sin 2x.$

241 $\operatorname{tg} \frac{3\pi - 4x}{2} - \cos 2x = 2\sqrt{3} \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

242 $\sin x (3 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 5.$

243. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) = 4.$

244. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{ctg} x.$

245. $\operatorname{ctg} 8x \operatorname{ctg} 10x = -1.$

246. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2 \cos 2x - 1.$

247. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$

248. $(\sin x + \cos x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 4 \sin x (1 - \operatorname{tg}^2 x)$.

249. $(\sin x + \cos x)(2 - \sin^2 2x) = 2(1 - \operatorname{tg}^3 x) \cos^3 x$

250 $\sin x + 3 \operatorname{tg} x = 3$.

251 $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x$.

252. $\sin 4x = a \operatorname{tg} x$

253. $a \cos x \sin x = \sin x (\operatorname{ctg} x + 1) + 1$.

254 $\operatorname{ctg} x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$.

255 $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 - \operatorname{tg} x$.

256 $1 - 2\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = \dfrac{4 \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x}$.

257 $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{4 \cos^2 x}{\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}}$

258 $\cos x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

259 $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \operatorname{ctg} 2x$

260. $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} + 2 \operatorname{tg} x = 0$

261. $2 \cos \dfrac{x}{2} = \sqrt{\cos 2x - 3 \cos x}$

262. $2\sqrt{2} \sin x \sin \dfrac{x}{2} = \sqrt{1 + \cos x}$

263 $\sin 4x \sin x - \sin 3x \sin 2x = \dfrac{1}{2} \cos 3x + (1 + \cos x)^{\frac{1}{2}}$

264. $\sqrt{\operatorname{tg} x + \sin x} + \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} \cos x$

265 $\sqrt{17 \sec^2 x + 16\left(\dfrac{1}{2} \operatorname{tg} x \sec x - 1\right)} = 2 \operatorname{tg} x (1 + 4 \sin x)$

266 $\dfrac{\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}}{\cos x} = 4 \sin x$, если $0 < x < 2\pi$

267. $\sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = n - 1, \quad n > 2$

268 Сколько решений на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ имеет уравнение

$$\sin x + 2 \sin 2x = 3 + \sin 3x?$$

269. При каких a уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное решение?

Решить системы уравнений (270 — 275).

270. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin \alpha; \\ \cos x + \cos y = \cos \alpha. \end{cases}$

271. $\begin{cases} \sin x \cos y = a^2; \\ \sin y \cos x = a. \end{cases}$

272. $\begin{cases} \sin x + \sec y = 2; \\ \sin x \sec x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

273. $\begin{cases} \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y; \\ x - y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

274. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = 3; \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 6; \\ x + y + z = \pi \end{cases}$

275 $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{ctg} z; \\ 2\cos 2(x - y - z) = 1; \\ x + y + z = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющих уравнению (276—278).

276. $\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \dfrac{3}{2}$.

277. $\left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \dfrac{1}{2}\sin y$

278. $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x + y)$

279. Найти такие значения a и b, для которых каждая пара чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $x + y = a$, удовлетворяет и уравнению $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b$ При этом $x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $y \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Решить уравнения (280—293)

280. $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$

281. $\lg^2 \sin x - 2a \lg \sin x - a^2 + 2 = 0$

282. $\sqrt[3]{\lg(10 \sin x) - \lg \cos x} + \sqrt[3]{\lg(10 \cos x) - \lg \sin x} = 2$.

283. $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1 + \cos x) = 2$.

284. $\log_{\sin x} \dfrac{4}{3} = -2$

285. $\log_{\frac{1}{8\cos^2 x}} \sin x = 0{,}5$.

286. $\log_{\sin^2 x} 3 = \log_2 \sin x$.

287. $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$

288. $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$

289. $(0{,}5)^{\cos 2x} - \dfrac{1}{4^{\sin^2 x}} = \dfrac{1}{2}$.

290. $\frac{1}{2}+16^{\sin x}=\frac{6}{16^{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}$

291. $1+2^{\operatorname{tg} x}=3\cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\cos x}}$

292. $4^{\sin x}+a\cdot 2^{\sin x}+a^2-1=0$

293. $(\cos x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$

III. Неравенства

Доказать неравенства (294—298)

294. $(a+b)^n<2^n(a^n+b^n)$; a, b — положительные числа, n — натуральное число

295. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$; a, b, c — положительные числа

296. $abc\geqslant(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$; a, b, c — длины сторон треугольника

297. $\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)\leqslant\frac{(n-1)^2}{4n}$, если $\operatorname{tg}\alpha=n\operatorname{tg}\beta$; $n>0$

298. $4\sin 3\alpha+5\geqslant 4\cos 2\alpha+5\sin\alpha$

При каких значениях k неравенство удовлетворяется тождественно относительно x (299, 300)

299. $\frac{3(2k+1)x^2-(8k+10)x+5k+9}{5x^2-6x+5}<k+2$?

300. $x^2\left(2-\log_2\frac{k}{k+1}\right)+2x\left(1+\log_2\frac{k}{k+1}\right)-2\left(1+\log_2\frac{k}{k+1}\right)>0$?

301. Найти все значения a, при которых неравенство $ax^2-4x+3a+1>0$ справедливо для всех $x>0$.

302 Найти все значения a, при которых неравенство $x^2+ax+a^2+6a<0$ справедливо для всех x, удовлетворяющих соотношению $1<x<2$

303 Найти все значения a, при которых из неравенства $0\leqslant x\leqslant 1$ следует неравенство $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2\leqslant 0$

304. Найти все значения a, при которых неравенство $2\log_{0,5}a^2-3+2x\log_{0,5}a^2-x^2>0$ имеет хотя бы одно решение

Решить неравенства (305—394)

305. $x^2+2x+a>0$

306 $x^2+ax+1>0$

307. $ax^2+x+1>0$

308 $|x^2-2x-3|<3x-3$

309 $\frac{x-2}{x+2}\geqslant\frac{2x-3}{4x-1}$

310 $\dfrac{5}{3-2x-x^2} < 1.$

311 $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3.$

312 $x^2 + \dfrac{x^2}{(x+1)^2} < 1{,}25$

313 $\dfrac{4x^3-3x-1}{(x^2-4)\sqrt{x}} > 0$

314 $\sqrt{3-x} > x-2$

315. $2x + \sqrt{a^2-x^2} > 0.$

316 $\dfrac{\sqrt{2-x^4}}{x} < 1$

317 $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > \dfrac{35}{12}$

318 $\sqrt{x} + \sqrt[3]{1-x} > 1.$

319 $9^x < 3^x + 2$

320. $4^x < 2^{x+1} + 3$

321 $2^x + 2^{1-x} > 3$

322 $2^{1,5x} - 3 \quad 2^{-0,5x} < \sqrt{2^x} + 3\sqrt{2^{-x}}.$

323. $\left(\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^x - \left(\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^{-x} < 1$

324. $\dfrac{1}{2^x+3} > \dfrac{1}{2^{x+2}-1}.$

325. $\dfrac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$

326 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x}} > \dfrac{1}{\sqrt{27}}$

327 $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \quad 30^x.$

328. $4^x \leqslant 3 \quad 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}.$

329 $4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \quad 3^{\sqrt{x}} < 2x^3 \quad 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6.$

330 $9^x \cdot x + 3^{2x} - 2 > 3^x \quad x + 3^x + 2x$

331 $27^x - 1 > 2(9^x - 3^x)$

332 $125^x + 2 \quad 45^x > 27^{x+\frac{1}{3}}.$

333 $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > 0$

334 $\log_8(x^2-4x+3) < 1.$

335. $\log_2(x^2-3x) \leqslant 2$

336. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)<0$.

337. $2-\log_2(x^2+3x)>0$.

338. $2\log_2(x-1)-\log_2(2x-4)>1$.

339. $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+1}<\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{4-x^2}+1$.

340. $\log_{0,5}(x-1)+\log_{0,5}(x-2)>\log_{0,5}(x+2)$.

341. $2\log_2\sqrt{2y+1}+\log_2(y+1)<\log_2(y+2)+1$.

342. $\dfrac{1}{\log_2 x}\leqslant\dfrac{1}{\log_2(\sqrt{x+2})}$.

343. $\log_{\frac{1}{4}}(x^3+0{,}125)>\log_{\frac{1}{4}}(x+0{,}5)+1$.

344. $\log_2\dfrac{x-3}{x+2}<0$

345. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\leqslant-1$.

346. $\log_3\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\geqslant 0$

347. $\log_2(\sqrt{x+3}-x-1)\leqslant 0$.

348. $\log_2\sqrt[8]{x}+\dfrac{3}{4}>\sqrt{\log_4 x}$

349. $\log_2 5\log_5\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)>1$.

350. $\log_2\log_3\dfrac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+1}{x-1}$.

351. $\log_{\frac{1}{3}}\log_5(\sqrt{x^2+1}+x)<\log_3\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

352. $\log_2(9-4^x)+2x>3$

353. $\log_{\frac{1}{4}}\left(4^{x^2+4x}+2^{x^2+4x}-\dfrac{1}{2}\right)>1$.

354. $x^{\lg^2 x-3\lg x+1}>1000$.

355. $x^{1-\log_{0,(3)}x}>3x$.

356. $x^{\log^2_{0,5}x}<\dfrac{1}{4x}$.

357. $\sqrt{\log_4 x}\log_{8\sqrt{x}}2>\dfrac{1}{4}$.

358. $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_x 3-\dfrac{5}{2}$.

359. $\log_x 2\log_{2x}2\log_2 4x>1$.

360. $\log_{x^2}(2+x)<1$.

361. $\log_{2x+3}x^2<1$

362. $\log_x\frac{2x-1}{x-1}>1$.

363. $\log_x\left(\frac{4x+5}{6-5x}\right)<-1$.

364. $\log_x 2x<\sqrt{\log_x(2x^3)}$.

365. $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2>0$.

366. $\log_y\frac{x}{3}>0$, где $y=\sqrt{2x^2-7x+6}$.

367. $\log_x[\log_2(4^x-6)]<1$.

368. $\log_{x^2}\left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right)>\frac{1}{2}$.

369. $(x^2+x+1)^x<1$.

370. $|x|^{x^2-x-2}<1$.

371. $2^{\frac{3\operatorname{tg}x-1}{1-\operatorname{tg}x}}>0{,}25$.

372. $\sin x>\cos x$.

373. $5+2\cos 2x<3|2\sin x-1|$

374. $2\sin^2 x+2\cos 2x-(2+\sqrt{2})\cos x+\sqrt{2}>0$.

375. $(1+\sqrt{3})\sin 2x+2\cos^2 x>2(1+\sqrt{3}\cos^2 x)$.

376. $\frac{5}{4}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x>\cos 2x$.

377. $2\sin^2 x+\sin x+3\cos^2 x>3$.

378. $\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2}>1$; x — вещественное число.

379. $2\cos 2x+\sin 2x>\operatorname{tg}x$.

380. $\operatorname{tg}^2 x<|1-2\operatorname{ctg}^2 x|$.

381. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}>\frac{\sin x-2\cos x}{\sin x+2\cos x}$, если $0<x<\pi$.

382. $\sqrt{2-\sqrt{3}\cos x+\sin x}>1$.

383. $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1$.

384. $\left[\frac{3(\sin x+\cos x)-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sin x-\cos x}\right]^{\frac{1}{2}}>1$.

385. $\log_{|\cos x+\sqrt{3}\sin x|}\frac{1}{3}>0$, если $0<x<2\pi$

386. $4\log_{16}\cos 2x+2\log_4\sin x+\log_2\cos x+3<0$, если $0<x<\frac{\pi}{4}$.

387. $4\log_4\sin x+\log_2(3-4\sin^2 x)+1>0$.

388. $(\log_{\sin x}2)^2<\log_{\sin x}(4\sin^2 x)$.

389. $(\log_{\operatorname{tg} x} 3)^2 < \log_{\operatorname{tg} x}(3 \operatorname{tg}^2 x)$.

390. $4^{\sin^2 \pi x} + 3 \cdot 4^{\cos^2 \pi x} \leqslant 8$.

391. $|3^{\operatorname{tg}^2 \pi x} - 3^{1-\operatorname{tg}^2 \pi x}| \geqslant 2$.

392. $\log_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x + 6) > 2$.

393. $\log_{\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{2}\right) < 2$.

394. $\log_{\sin x} \operatorname{tg} x < 2 \log_{\operatorname{tg} x} \sin x + 1$.

395. Найти все вещественные значения x, при которых выражение $\sqrt{x^2 - 5x + 4} + \lg(x + 2)$ есть вещественное число

396. Найти все вещественные значения x, при которых выражение $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)}$ есть вещественное число

IV. Геометрические задачи на плоскости

397. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине A равен 20°. На боковых сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $\angle MCB = 60°$, а $\angle NBC = 50°$. Найти углы треугольника MNP, где P — точка пересечения прямых CM и BN.

398. Периметр равнобедренного треугольника равен 16, а его основание 6. Найти расстояние между ортоцентром и центром тяжести этого треугольника

399. Равнобедренный треугольник со сторонами 8; 5; 5 разделен на три равновеликие части перпендикулярами, опущенными из некоторой точки на его стороны. Найти расстояние от этой точки до стороны данного треугольника.

400. Треугольник со сторонами 4; 5; $\sqrt{17}$ разделен на две равновеликие фигуры прямой, перпендикулярной меньшей его стороне. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами данного треугольника

401. Некоторая точка, лежащая внутри равностороннего треугольника, отстоит от одной его вершины на расстоянии 1, а от каждой из остальных — на расстоянии 2 Найти площадь этого треугольника.

402 В треугольник со сторонами 8; 8; 8 $\sqrt{\frac{2}{5}}$ вписан квадрат так, что одна из его вершин лежит на меньшей стороне треугольника, а три остальные вершины — на двух других сторонах треугольника. Найти сторону этого квадрата

403. В равносторонний треугольник со стороной, равной 3, вписан другой равносторонний треугольник, втрое меньший первого по площади Найти расстояния между смежными вершинами этих треугольников.

404. Равносторонний треугольник, площадь которого равна 1, повернут около своего центра на угол 30° по отношению к своему первоначальному положению. Найти площадь, общую обоим положениям этого треугольника.

405. Внутри треугольника ABC со сторонами a, b и c взята такая точка O, что $\angle OBC = \angle OCA = \angle OAB = \alpha$ Найти $\operatorname{ctg} \alpha$

406. Найти угол треугольника, зная длину l биссектрисы, проведенной из вершины этого угла, и длины h_a и h_b высот этого треугольника, проведенных из двух других его вершин.

407. Стороны a, b, c треугольника заданы соотношениями $c^2 = k^2 + m^2$, $a^2 = m^2 + n^2$, $b^2 = n^2 + k^2$, где k, m, n — положительные числа и $k = m + n$ Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 = 8S$ (S — площадь треугольника).

408. Высота и медиана, выходящие из вершины прямого угла треугольника, относятся как 40 . 41 Найти отношение катетов этого треугольника.

409. Расстояние от вершины прямого угла до гипотенузы равно a, а до точки пересечения биссектрисы меньшего угла с меньшим катетом равно b Найти длину меньшего катета.

410. Основание треугольника делится высотой на отрезки 18 и 7. Не который перпендикуляр к основанию делит его на две равновелнкие части Найти расстояния от концов основания до этого перпенднкуляра

411. Треугольник со сторонами 13, 14; 15 разделен на три равновеликие части прямыми, перпендикулярными к большей стороне. Найти расстояния до этих прямых от ближайших к ним вершин треугольника, находящихся на большей стороне.

412. Перпендикуляр, восставленный к гипотенузе треугольника из ее середины O, пересекает один катет в точке K, продолжение другого катета — в точке M. Найти катеты треугольника; если $OK = a$ и $OM = b$.

413 Найти биссектрису прямого угла треугольника, если его катеты b и c

414. Из вершины остроугольного треугольника со стороиами a, b, c проведены к первой из сторон высота, биссектриса и меднана В каком отношеиии делит биссектриса отрезок стороны треугольника, заключенный между высотой и медианой?

415. Даны биссектриса l угла треугольника, образованного его сторонами b и c, и отрезок m биссектрисы смежного с ним угла, заключенный между его вершиной и продолжением противоположной стороны. Доказать, что площадь этого треугольника

$$S = \frac{lm(b^2 - c^2)}{4bc}$$

при $b > c$

416. Найти биссектрису треугольника со сторонами a, b, c, проведенную к стороне a.

417. Найти проекцию высоты треугольника со сторонами a, b, c, проведенную к стороие a, иа меднану, проведенную к той же стороне

418. В треугольнике со сторонами a, b, c проведена меднана к стороне c. Найти проекцию этой медианы на сторону c

419. На стороне BC треугольника ABC построены два равносторонних треугольника BCD и BCD'. Найти длины отрезков AD и AD', если стороны данного треугольника a, b, c.

420. Через середину O стороны $AC = 4\sqrt{3}$ равностороннего треугольника ABC проведена прямая KN, пересекающая сторону BC в точке N, а продолжение BA — в точке K. Найти отрезок KN, если отрезок OK в два раза больше отрезка ON, а точка O расположена между точками K и N.

421. В равностороиием треугольнике ABC через середииу O стороны AB проведена прямая, пересекающая AC в точке M, а продолжение BC — в N. Разность площадей треугольников OBN и OMA равна площади данного равностороннего треугольника Найти длину отрезка AM, если сторона равностороиего треугольника равна $1 + \sqrt{2}$.

422. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла треугольника на его гипотенузу, делит гипотенузу в отношении 9 16. Найти площадь этого треугольиика, зная раднус r вписанной в иего окружности.

423. В параллелограмме $ABCD$ угол при вершине A равен $\alpha < \frac{\pi}{2}$

Высота, опущенная из вершины B на сторону AD, делит диагональ AC в отношении m . n. Найти отношение сторон параллелограмма.

424. Основания трапеции равны a и b, сумма ее острых углов равна 90°, а меньшая диагональ перпендикулярна основаниям. Найти боковые стороны трапеции.

425. Вычислить площадь общей части двух ромбов, из которых у первого диагонали равны 2 и 3, а второй получается поворотом первого на 90° около его центра.

426. Из точки A окружности радиуса R с центром O опущен перпендикуляр AB на диаметр этой окружности. Вычислить площадь четырехугольника $MOAB$, где M — точка пересечения биссектрисы угла OAB с окружностью, если $AB = h$.

427. Через точку P, лежащую вне окружности с центром O и радиусом R, проходят две взаимно перпендикулярные секущие. Первая секущая пересекает окружность в точках A и C (точка C лежит между P и A), а вторая секущая — в точках B и D (D лежит между P и B). Пусть P_1 — проекция P на AB, а M одна из точек пересечения AB с окружностью, центр которой P_1, а радиус P_1O. Найти длину отрезка MP.

428. К кругу радиуса r проведены две секущие из одной точки, причем одна из них проходит через центр. Найти кратчайшее расстояние от этой точки до окружности, зная дуги α и β окружности, заключенные между проведенными секущими ($\alpha > \beta$).

429. В окружности радиуса R через точку M диаметра проведена хорда AB под углом φ к диаметру, причем $BM : AM = p : q$. Через точку B проведена хорда BC, перпендикулярная данному диаметру, и точка C соединена с точкой A. Найти площадь треугольника ABC.

430. Величины углов C, A, B треугольника ABC образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, K — центр окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BC и BA за точки C и A, L — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AC и AB за точки C и B. Доказать, что треугольники ABC и OKL подобны.

431. Даны углы α, β, γ треугольника ABC. Найти отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$, где A_1, B_1, C_1 — точки пересечения биссектрис внутренних углов треугольника ABC с окружностью, описанной вокруг него.

432. На плоскости даны две точки A и B. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$MA \cdot MB \cos \widehat{AMB} = \frac{3}{4} AB^2.$$

433. Найти площадь прямоугольного треугольника, зная его гипотенузу c и радиус r вписанного в этот треугольник круга.

434. В равнобедренный треугольник с основанием a вписана окружность. Найти радиус этой окружности, если расстояние между точками касания ее с боковыми сторонами треугольника равно b.

435. В треугольнике ABC из вершины C проведены высота CD и медиана CF. Найти радиус круга, вписанного в треугольник CFD, если углы при вершинах A и B равны α и β соответственно и $CD = h$.

436. В круг радиуса 1 вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

437. Около круга радиуса 1 описаны квадрат и равносторонний треугольник, причем одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

438. В окружность вписаны равнобедренный треугольник и трапеция, причем боковые стороны треугольника параллельны боковым сторонам трапеции. Одно из оснований трапеции является диаметром окружности. Найти высоту трапеции, если ее средняя линия равна l, а площадь данного треугольника равна S.

439. К окружности радиуса r из внешней точки A проведены касательная AP и секущая AO, проходящая через центр окружности, причем $AO = 2AP$. Найти радиус окружности, которая касается секущей, касательной вне отрезка AP и радиуса данной окружности, проведенного в точку P.

440. На большей боковой стороне прямоугольной трапеции, как на диаметре, построена окружность, которая касается меньшей боковой стороны. Найти площадь прямоугольного треугольника с катетами, равными основаниям трапеции, если ее меньшая боковая сторона равна a.

441. Через две смежные вершины квадрата проведена окружность радиуса R. Длина касательной к окружности, проведенной из третьей вершины квадрата, относится к стороне квадрата как 2 : 1. Найти расстояние между центрами окружности и квадрата.

442. В равнобочную трапецию вписан круг. Определить углы трапеции, если отношение площадей трапеции и круга равно m.

443. На диагоналях трапеции, как на диаметрах, построены окружности. Найти длину общей хорды этих окружностей, если диагонали трапеции $2m$ и $2n$, а разность ее оснований равна $2k$.

444. Через точку, делящую диаметр окружности радиуса r в отношении 2 : 3, проведена хорда под острым углом α к диаметру. В угол α вписана окружность, касающаяся хорды, наибольшего из отрезков диаметра и дуги данной окружности. Найти радиус вписанной окружности.

445. Дан круговой сектор радиуса r с центральным углом в 90°. На радиусе этого сектора, как на диаметре, построена полуокружность, расположенная внутри данного сектора. Найти радиус окружности, касающейся построенной полуокружности, дуги данного сектора и одного из его радиусов.

446. В полуокружность радиуса r вписаны две равные окружности, касающиеся этой полуокружности, ее диаметра и друг друга. Найти радиус окружности, касающейся этих двух окружностей и данной полуокружности.

447. В круговой сектор с центральным углом $\alpha < 180°$ и радиусом r вписан квадрат так, что две вершины его лежат на дуге сектора, а две другие — на радиусах, ограничивающих сектор. Найти площадь этого квадрата.

448. В круговой сектор радиуса r с центральным углом $\alpha < 180°$ вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на дуге сектора, а остальные на радиусах, ограничивающих сектор. Найти стороны прямоугольника, если его площадь равна S.

449. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ точки K, L, M, N являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD, DE. Найти расстояние между серединами P и Q отрезков LN и KM, если $AE = 12$.

V. Геометрические задачи в пространстве

450. Отрезок AB длиной a и отрезок CD длиной b лежат на скрещивающихся прямых, угол между которыми α. Основания O и O_1 общего перпендикуляра OO_1 длины c к отрезкам AB и CD делят их так, что $AO : OB = 2 : 3$, а $CO_1 : O_1D = 3 : 2$. Найти длины отрезков BD и BC.

451. Из концов A и B отрезка AB проведены два взаимно перпендикулярных луча, каждый из которых перпендикулярен отрезку AB. На луче, выходящем из A, взята точка M, а на луче, выходящем из B, — точка P, при этом $2AM \cdot BP = AB^2$. Доказать, что расстояние от середины O отрезка AB до прямой MP равно $\frac{1}{2} AB^2$.

452. В плоскости P задан равносторонний треугольник ABC со стороной a. На перпендикуляре к плоскости P в точке A откладывается отрезок $AS = a$. Найти тангенс острого угла между прямыми AB и SC и кратчайшее расстояние между ними.

453. В плоскости P задан равносторонний треугольник ABC со стороной a. На перпендикулярах в точках B и C к плоскости P по одну сторону

от нее откладываются отрезки $CE = a\sqrt{2}$ и $BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Найти острый угол, образованный плоскостями P и DAE.

454. Внутри трехгранного угла, все плоские углы которого равны α, проходит прямая, одинаково наклоненная к его ребрам. Найти угол наклона этой прямой к ребру трехгранного угла

455. В трехгранном угле все плоские углы равны между собой и каждый равен α. Найти расстояние от вершины угла до точки, которая находится внутри угла и отстоит от каждой его грани на расстоянии, равном a.

456. Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу в отношении 1 . 2. Этот треугольник повернут вокруг меньшего катета так, что другой катет повернулся на угол α На какой угол при этом повернулась гипотенуза?

457. Дан куб с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. В каком отношении делится ребро C_1B_1 плоскостью, проходящей через вершину A и центры граней, пересекающихся по ребру B_1C_1?

458. Дан куб с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Найти площадь многоугольника, который получится в сечении этого куба плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер B_1C_1 и C_1D_1. Ребро куба равно 1

459. Дан куб с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 Найти площадь многоугольника, который получится в сечении этого куба плоскостью, проходящей через центр куба и середины ребер AB и BC. Ребро куба равно 1.

460. Найти кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися диагоналями двух соседних граней куба, ребро которого равно a.

461. Через середину диагонали куба перпендикулярно к ней проведена плоскость. Определить площадь фигуры, получившейся в сечении куба этой плоскостью, если ребро куба равно a.

462. Через ребро куба проведена плоскость, делящая его объем в отношении 2 3. На какие части она делит двугранный угол?

463. Дан куб с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1?

464. Дан куб с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 На продолжении ребер AB, AA_1, AD отложены соответственно отрезки BM, A_1N и DP, каждый длиной 1,5 AB ($AM = AN = AP = 2{,}5\ AB$). Через точки M, N и P проведена плоскость В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

465. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью — угол β. Высота параллелепипеда равна h. Найти объем этого параллелепипеда.

466. В прямоугольном параллелепипеде угол между диагоналями двух смежных боковых граней, выходящих из одной вершины, равен α. Одна сторона основания равна a, а другая составляет с диагональю проходящей через нее боковой грани угол β. Найти полную поверхность параллелепипеда.

467. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с тупым углом α и сторонами a и b. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найти объем параллелепипеда.

468. Найти острый угол между смежными боковыми гранями прямого параллелепипеда, зная длины a и b диагоналей этих граней и длины c и d диагоналей основания параллелепипеда ($c > d$)

469. Длины диагоналей одной грани параллелепипеда равны a и a_1, другой b и b_1 и третьей c и c_1. Найти площадь грани с диагоналями a и a_1.

470. Найти объем параллелепипеда, длина каждого ребра которого равна 1 и каждый плоский угол при одной из вершин равен $\varphi < 90°$.

471. В тетраэдре одно ребро равно 6, противоположное ему ребро — 8, а каждое из остальных ребер — $\sqrt{74}$. Найти радиус шара, описанного около этого тетраэдра.

472. Дана правильная треугольная призма с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. На продолжении ребра A_1B_1 взята точка M так, что $B_1M = \frac{1}{2} A_1B_1$ $\left(A_1M = \frac{3}{2} A_1B_1\right)$. Через точку M и середины ребер A_1C_1 и B_1B проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

473. Дана правильная треугольная призма с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1. На продолжении ребра BA взята точка M так, что $MA = AB$ $(MB = 2AB)$. Через точки M, B_1 и середину K ребра AC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

474. Дана прямая призма, основанием которой является правильный треугольник. Через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость. Угол между этой плоскостью и основанием призмы равен α, а площадь сечения призмы равна S. Определить объем призмы.

475. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с площадью, равной $2м^2$. Высота призмы равна гипотенузе этого треугольника. Какими должны быть стороны основания, чтобы боковая поверхность призмы была наименьшей?

476. Нижним основанием прямой четырехугольной призмы служит ромб с острым углом φ. Известно, что в эту призму можно вписать шар диаметра d. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через ребро нижнего и ребро верхнего оснований, принадлежащих противоположным боковым граням.

477. В правильной шестиугольной призме проведены два параллельных сечения: одно проходит через середины двух несмежных и непараллельных сторон основания и середину оси призмы, другое делит ось призмы в отношении 1 : 3. Зная, что площадь первого сечения равна S, найти площадь второго.

478. Найти объем правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r.

479. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b, а угол между боковыми гранями равен φ. Найти сторону основания.

480. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а двугранный угол при основании — φ. Найти длину отрезка, соединяющего середину стороны основания с серединой прилежащего бокового ребра.

481. Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной к основанию и делящей две стороны основания пополам. Найти объемы полученных частей пирамиды, если длина стороны основания равна a, а двугранный угол при основании равен φ.

482. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды восставлен перпендикуляр на боковую грань, равный a. Определить объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α.

483. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный a. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен α.

484. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на ее боковую грань опущен перпендикуляр, равный a. Найти объем пирамиды, если плоский угол при вершине этой пирамиды равен α.

485. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный a. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α.

486. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α. Определить двугранный угол при боковом ребре этой пирамиды.

487. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом α. Найти угол между высотой пирамиды и плос-

костью, проходящей через сторону основания и середину противоположного ей бокового ребра

488. Основанием треугольной пирамиды служит равнобедренный треугольник с площадью S и основанием a. Две боковые грани пирамиды, опирающиеся на боковые стороны этого треугольника, имеют при вершине пирамиды прямые углы. Найти угол, образованный третьей боковой гранью пирамиды с плоскостью основания, если объем пирамиды равен V.

489. Основанием пирамиды служит треугольник, два угла которого α и β. Ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания одинаково — под углом φ. Вычислить объем этой пирамиды, если ее высота равна h.

490. В правильной четырехугольной пирамиде точка P лежит на высоте и делит высоту в отношении $1:3$, считая от основания. Расстояние от этой точки P до бокового ребра равно m, а до боковой грани — n. Определить полную поверхность пирамиды.

491. От правильной четырехугольной пирамиды отсечена другая пирамида плоскостью, проходящей через ребро AB основания. Отношение боковых поверхностей этих пирамид равно 2. Определить отношение площади треугольника, который отсекается проведенным сечением от грани, противолежащей ребру AB, к площади этой грани.

492. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а угол наклона боковой грани к основанию равен φ. В этой пирамиде через ребро основания проведена плоскость, делящая двугранный угол при этом ребре пополам и пересекающая противоположную ребру грань по отрезку, длину которого требуется определить.

493. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен φ. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

494. В правильной четырехугольной пирамиде площадь сечения ее плоскостью, проходящей через диагональ основания и высоту пирамиды, равна S, а сторона основания равна b. Найти двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

495. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде даны ее высота h и углы α и β, образуемые большим основанием с боковым ребром и диагональю усеченной пирамиды. Найти боковую поверхность этой пирамиды.

496. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны верхнего и нижнего оснований относятся как $m:n$, а боковое ребро наклонено к плоскости нижнего основания под углом α. Найти двугранный угол, заключенный между плоскостью основания пирамиды и плоскостью, проведенной через сторону нижнего основания и противоположную ей сторону верхнего.

497. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен φ, а сторона основания равна b. Через сторону основания проведена плоскость, образующая угол α с основанием. Найти объем пирамиды, отсеченной этой плоскостью от данной пирамиды.

498. Дана правильная четырехугольная пирамида $KABCD$ с вершиной K. Через точки A, B и середину E ребра KC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

499. Дана правильная четырехугольная пирамида $KABCD$ с вершиной K. На продолжении ребра CB взята точка M так, что $MB = \frac{1}{2}BC$ $\left(MC = \frac{3}{2}BC\right)$. Через точку M и середины ребер AB и KC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

500. Дана правильная четырехугольная пирамида $KABCD$ с вершиной K. На продолжении ребра CD взята точка M так, что $MD = 2DC$ $(MC = 3DC)$. Через точки M, B и середину N ребра KC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

501. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом β. Двугранные углы при основании равны между собой и равны α. Найти объем этой пирамиды.

502. В правильной шестиугольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Найти угол наклона боковых ребер этой пирамиды к плоскости ее основания.

503. Площадь боковой грани правильной двенадцатиугольной пирамиды равна S, а плоский угол при ее вершине равен α Найти объем пирамиды.

504. В правильной n-угольной пирамиде плоский угол при вершине равен 2α. Расстояние от центра основания пирамиды до середины ее бокового ребра равно a. Найти полную поверхность пирамиды

505. Вычислить боковую поверхность правильной n-угольной пирамиды, зная ее высоту h и угол φ наклона бокового ребра к основанию

506. Определить плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды, зная угол α наклона бокового ребра к плоскости ее основания.

507. Найти величину двугранного угла, заключенного между смежными боковыми гранями правильной n-угольной пирамиды, зная плоский угол α при вершине этой пирамиды

508. Объем цилиндра, осевое сечение которого квадрат, равен V. Диагональ прямоугольника, образованного сечением цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, наклонена к плоскости основания под углом α. Найти расстояние этого сечения от оси цилиндра

509. Ромб, площадь которого Q, вращается вокруг своей стороны. Найти полную поверхность тела вращения

510. В правильную n-угольную пирамиду вписан конус. Найти отношение полной поверхности пирамиды к полной поверхности конуса.

511. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая равна a и наклонена к плоскости нижнего основания под углом φ. Найти объем этого конуса

512. В конус, радиус основания которого равен a, вписан правильный тетраэдр так, что одна из его вершин совпадает с центром основания конуса, а противоположная ей грань параллельна основанию. Найти ребро тетраэдра, если угол наклона образующей конуса к плоскости его основания равен τ.

513. Ребро куба равно a Сфера с центром O пересекает три ребра, сходящиеся в вершине A, в их серединах. Из точки B пересечения сферы с одним из ребер куба опущен перпендикуляр на диагональ куба, проходящую через вершину A, причем угол между этим перпендикуляром и радиусом OB делится ребром куба пополам. Найти радиус сферы.

514. Найти объем правильной треугольной пирамиды, зная радиус r вписанного в нее шара и угол наклона α ее боковой грани к основанию.

515. Вычислить ребра правильной треугольной призмы, зная радиус R описанного около нее шара и угол наклона α радиуса этого шара, проведенного в вершину призмы, к боковой грани, содержащей эту вершину.

516. В правильной треугольной пирамиде известен плоский угол α при вершине боковой грани и радиус r вписанного шара. Найти объем пирамиды

517. В правильную треугольную пирамиду вписан шар Найти плоский угол при вершине боковой грани, если поверхность шара относится к площади основания пирамиды как $4 : \sqrt{3}$.

518. Высота правильной треугольной пирамиды равна h Точки пересечения высот каждой из боковых граней и вершина пирамиды лежат на поверхности шара радиуса r. Найти объем этой пирамиды

519. Одна из граней правильного тетраэдра лежит в плоскости P Шар радиуса R, расположенный вне тетраэдра, касается плоскости P и другой грани тетраэдра в ее центре. Найти ребро тетраэдра

520. Шар радиуса r касается боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их высот. Найти длину бокового ребра этой пирамиды, если сумма плоских углов при ее вершине равна α.

521. Шар касается боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их биссектрис Найти периметр основания пирамиды, если угол между биссектрисами двух ее боковых граней, проведенных из вершины пирамиды, равен α, а объем пирамиды равен V.

522. Высота треугольной пирамиды равна h, а сумма всех девяти плоских углов при вершинах ее основания равна α. Известно, что существует шар, касающийся всех боковых граней пирамиды в точках пересечения их медиан. Найти радиус этого шара.

523. Каждый из трех плоских углов при вершине треугольной пирамиды равен α, а сумма длин ее боковых ребер равна $3b$. Известно, что существует шар, который касается всех боковых граней пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Найти радиус этого шара.

524. Шар радиуса r касается всех шести ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте на расстоянии $r\sqrt{3}$ от вершины. Найти высоту этой пирамиды.

525. Боковая поверхность треугольной пирамиды равна S, а периметр основания $3a$. Шар касается всех трех сторон основания пирамиды в их серединах, а середины боковых ребер пирамиды лежат на поверхности шара. Найти радиус этого шара.

526. Пусть стороны основания треугольной пирамиды равны a, b, c, а боковые ребра составляют одинаковые углы с плоскостью основания. Определить объем пирамиды, если известно, что радиус шара, описанного вокруг нее, равен R.

527. В четырехугольную пирамиду вписан шар. Основанием этой пирамиды является равнобедренная трапеция с боковой стороной l и острым углом φ. Боковые грани пирамиды, проходящие через основания трапеции, — равнобедренные треугольники, образующие с основанием пирамиды один и тот же угол α. Найти радиус вписанного шара.

528. Вершина пирамиды, в основании которой лежит прямоугольник, ортогонально проектируется в точку пересечения его диагоналей. Одно из ребер пирамиды имеет длину l и образует с плоскостью основания угол φ. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

529. Правильная девятиугольная пирамида объемом V вписана в шар, центр которого находится внутри пирамиды. Найти расстояние от центра шара до плоскости основания пирамиды, если угол наклона радиуса шара, проведенного в вершину основания пирамиды к основанию пирамиды, равен φ.

530. Найти радиус шара, вписанного в правильную n-угольную пирамиду, зная сторону ее основания b и плоский угол при ее вершине α.

531. Вокруг правильного тетраэдра описан шар и в этот же тетраэдр вписан шар. Найти отношение объемов этих шаров.

532. Найти двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды, зная, что радиус описанного около нее шара в 2,5 раза больше радиуса вписанного в нее шара.

533. Найти величину части поверхности правильной четырехугольной призмы, заключенной внутри шара, который проходит через вершины нижнего основания призмы и касается плоскости верхнего ее основания. Сторона основания призмы равна $2a$, а ее высота $a(\sqrt{3}+1)$.

534. На высоте конуса, как на диаметре, построен шар, который пересекает конус по некоторой окружности. Найти радиус этой окружности, если образующая конуса равна l, а угол осевого сечения конуса плоскостью при вершине конуса равен α.

535. В конус вписан шар. Линия касания шаровой и конической поверхностей делит поверхность шара в отношении $m:n\ (n>m)$. Найти угол наклона образующей конуса к его оси.

536. Полная поверхность конуса в n раз больше поверхности вписанного в него шара. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

537. В конус с радиусом основания R и углом наклона α образующей к основанию вписан шар. Найти объем верхней части конуса, ограниченной шаровой и конической поверхностями.

538. Найти отношение объема конуса к объему описанного около него

шара, если образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом α

539. В конус вписаны два шара, касающиеся этого конуса и друг друга. Какую часть объема конуса они занимают, если образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом φ?

540. В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса Пятый шар касается боковой поверхности конуса и остальных четырех шаров. Определить объем конуса, если радиус каждого шара равен R.

541. В конус вписан полушар так, что большой круг полушара лежит в плоскости основания конуса. В каком отношении делится объем конуса сферической поверхностью полушара, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ?

542. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости его основания, если площадь основания конуса, поверхность вписанного в него шара и боковая поверхность этого конуса образуют арифметическую прогрессию.

543. В усеченный конус, образующая которого l, а угол образующей с основанием α, вписан шар Найти радиус круга, по которому шар касается усеченного конуса

544. В шаровой сектор вписан шар. Радиус окружности, по которой шар касается сектора, равен r. Плоскость симметрии шарового сектора высекает из него круговой сектор с центральным углом 2φ. Найти радиус шарового сектора.

545. В правильный тетраэдр, объем которого V, вписан цилиндр так, что одно основание цилиндра лежит в плоскости основания тетраэдра, окружность другого основания касается боковых граней тетраэдра, а высота цилиндра находится на высоте тетраэдра, Найти объем многогранника, вершинами углов которого служат точки пересечения с поверхностью цилиндра остальных высот тетраэдра, если высота цилиндра относится к высоте тетраэдра как 1 : 6

VI. Разные задачи

546. Сумма четырех целых чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 18, а сумма обратных им чисел равна 0,94(9). Найти эти числа

547. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов Сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 455, а сумма членов, стоящих на четных местах, равна 1365. Найти эту прогрессию.

548. Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую, причем сумма крайних чисел равна 32, а сумма средних равна 24.

549. Первые члены арифметической и геометрической прогрессий одинаковы и каждый равен 2, третьи тоже одинаковы, а вторые члены отличаются на 4. Найти эти прогрессии, если все их члены положительны.

550. При каких x числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ являются первым, вторым и третьим членами арифметической прогрессии?

551. При каком соотношении между a, b, c корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ образуют геометрическую прогрессию?

Решить уравнения (552—554):

552. $A_x^4 P_{x-4} = 42 \cdot P_{x-2}$.

553. $3C_x^6 = 4C_{x-1}^5$

554. $35C_{2n}^{n-1} = 132 \cdot C_{2(n-1)}^n$.

Доказать равенства (555—557):

555. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = C_{n+1}^3 + 2(C_n^3 + C_{n-1}^3 + \ldots + C_3^3)$

556. $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n = (n+2)\ 2^{n-1}$.

557. $C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 - \ldots + (-1)^k C_{n+1}^k = (-1)^k C_n^k$, при этом считается, что $C_m^0 = 1$ при любом m и $C_p^q = 0$, если $q > p$.

558. Из чисел 1, 2, 3, . . , 100 составляются всевозможные парные произведения. Сколько из полученных таким образом чисел будет кратно трем?

559. С помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, переставляя их, образуют всевозможные пятизначные натуральные числа, причем каждая из этих цифр входит в каждое число один и только один раз Сколько среди этих чисел будет таких, в которых цифры 1 и 3 не стоят рядом?

560. В разложении бинома $(x+y)^n$ второй член равен 240, третий 720, а четвертый 1080 Найти x, y, n.

561. Доказать, что многочлен $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ делится на $(x-1)^3$

Доказать, что если n — натуральное число, то число a делится на число b (562—563)

562. $a = 2^{2n} + 15n - 1$, $b = 9$.

563. $a = 3^{2n+3} + 40n - 27$, $b = 64$

564. Доказать, что если целые числа a и b при делении на одно и то же натуральное число m дают одинаковые остатки, то при делении a^k и b^k (k — натуральное число) на число m также получатся одинаковые остатки.

565. Сколько множителей 2 имеется в числе 500!?

566. Найти аргумент комплексного числа $z^2 - z$, если $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

567. Доказать, что всякое комплексное число, отличное от -1, модуль которого равен 1, может быть представлено в виде $z = \dfrac{1+xi}{1-xi}$, где x — вещественное число.

568. Доказать, что комплексное число $z = \dfrac{1+xi}{1-xi}$, где x — вещественное число, имеет модуль, равный 1.

569. Доказать, что если модуль комплексного числа z равен 1, а само число отлично от 1 и от -1, то число $\dfrac{z-1}{z+1}$ — число мнимое

570. Доказать, что если число $\dfrac{z-1}{z+1}$ — число мнимое, то $|z| = 1$

571. Даны три комплексных числа z_1, z_2, z_3, удовлетворяющих условиям $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Доказать, что соответствующие им точки являются вершинами равностороннего треугольника, сторона которого равна $\sqrt{3}$.

572. Доказать, что если $|z_1| = |z_2| = 1$, то число $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ — вещественное.

Ответы, указания и решения к упражнениям

1—12. Определения — 2, 5, 7, 12. Аксиомы — 4, 9. Теоремы — 1, 3, 6, 8, 10, 11.

13. Указание. Биссектриса угла — луч. Биссектриса треугольника — отрезок прямой.

14. Указание. Высота треугольника — отрезок перпендикуляра к стороне треугольника.

15. Наклонная призма с достаточно малой высотой не имеет перпендикулярного сечения

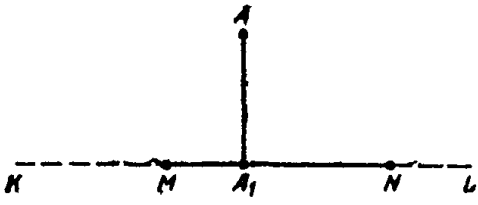

Рис. 98

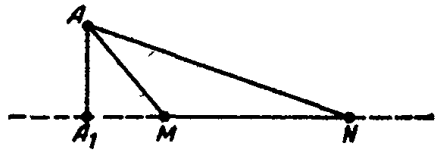

Рис 99

16. Если основание A_1 (рис. 98) перпендикуляра AA_1, проведенного через данную точку A к прямой KL, на которой лежит отрезок MN, находится на отрезке MN, то расстоянием от данной точки A до данного отрезка MN назовем расстояние AA_1 от этой точки до прямой, на которой находится отрезок.

Если же основание A_1 (рис 99) не находится на отрезке, то расстоянием от точки до отрезка назовем расстояние от этой точки до того конца данного отрезка, до которого оно меньше (на рис 99 оно равно длине AM)

17. Четырехугольник, диагонали которого делят его углы пополам, есть

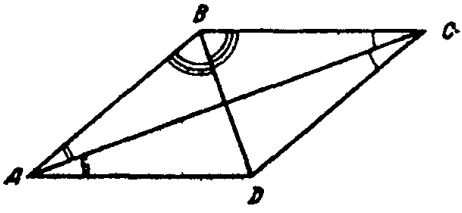

Рис. 100

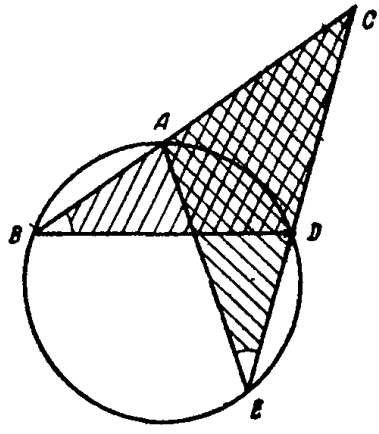

Рис. 101

ромб. Для доказательства достаточно установить равенства: $\triangle ABC = \triangle ADC$, $\triangle BCD = \triangle BAD$ (рис. 100)

18. Если из точки C (рис. 101) проведены к окружности секущая CAB, имеющая с окружностью точки пересечения A и B, и отрезок прямой CD, где D — точка окружности, и если $CA \cdot CB = CD^2$, то прямая CD есть касательная к этой окружности.

Доказательство. Предположим, что CD не касательная. Тогда она будет секущей, и пусть E — вторая общая точка прямой CD с окружностью. Построим треугольники AEC и DBC. Легко доказать их подобие. Из подобия получим $CA \cdot CB = CD \cdot CE \neq CD^2$, так как $CE \neq CD$ ($CE = CD + DE$ или $CE = CD - DE$). Но это противоречит условию. Следовательно, CD — касательная.

19. Если в четырехугольнике, две противоположные стороны которого не параллельны, отрезок прямой, соединяющий середины этих сторон, равен полусумме двух других сторон четырехугольника, то этот четырехугольник — трапеция. Указание. Для доказательства соединить вершину B (рис. 102) четырехугольника $ABCD$ с серединой N стороны CD отрезком прямой BN и, продолжив отрезок BN на $NE = BN$, соединить точку E с вершиной A. Отсюда найдем, что $MN = \frac{1}{2} AE$. Затем соединить D и E и доказать, что $AD + DE = AE$.

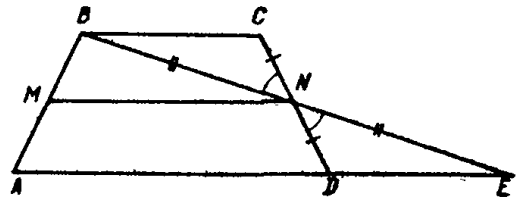

Рис. 102

22. Указание. Записав левую часть в виде $8\sqrt{3} \sin 20° \sin 40° \sin 80°$, представить произведение $\sin 20° \sin 80°$ в виде разности косинусов.

23. $(4k+1)\pi < \alpha < (4k+2)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Указание. Представить левую часть равенства в виде $\sqrt{2}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| + \sqrt{2}\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$. Из сравнения ее с правой частью заключаем, что $\sin\frac{\alpha}{2} \geqslant 0$, $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$.

24. $x = a\left(1 + a^{\frac{2}{3n}}\right)^{-n}$. Указание. $0 < x < a$. Вынести за скобку $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{x}}$, после чего уравнение легко приводится к виду

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}\right)^{3n} = a^2.$$

Отсюда $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{x}} - 1 = a^{\frac{2}{3n}}$.

25. $x = 4$.

26. $x = \frac{1}{5}$. Указание. Так как левая часть положительна, то $-6\log_x \sqrt{5} > 0$, $\log_x 5 < 0$, $0 < x < 1$. Предполагая это выполненным, возводим уравнение в квадрат.

27. $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Указание. Допустимые для неравенства значения x удовлетворяют соотношениям $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Левую часть преобразуем так:

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x (1 - \operatorname{tg} x)} = \frac{(1 - \operatorname{tg} x)^2 + 2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)} =$$

$$= \left[\frac{(1 - \operatorname{tg} x)^2}{\operatorname{tg} x} + 2\right] \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x} > \frac{2}{\frac{1}{4} - \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\right)^2} > 8.$$

28. Достаточно.
29. Необходимо.
30. Необходимо.
31. Необходимо и достаточно.
32. Необходимо.
33. Необходимо и достаточно.
34. Достаточно.
35. Достаточно
36. Необходимо и достаточно.

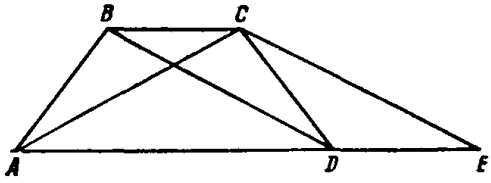

Рис. 103

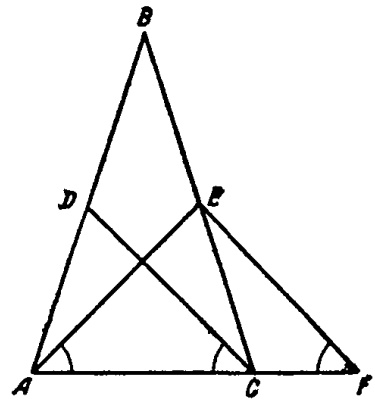

Рис. 104

37. Указание См. пример 11, решенный в тексте.

38. Необходимость. Пусть $a_1x + b_1 = 0$ и $a_2x + b_2 = 0$ совместны. Первое уравнение имеет единственное решение $x_1 = -\frac{b_1}{a_1}$, а второе — $x_2 = -\frac{b_2}{a_2}$. Так как $x_1 = x_2$, т. е. $-\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2}$, то $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Достаточность. Из условия $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ находим $-\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2}$. Легко проверить, что $-\frac{b_1}{a_1}$ удовлетворяет первому уравнению, а равное ему число $-\frac{b_2}{a_2}$ — второму.

39. Указание. Для доказательства необходимости можно рассмотреть треугольники ABD и ACD (рис. 103). Для доказательства достаточности полезно провести $CE \parallel BD$ до пересечения с продолжением AD в точке E

40. Указание. Для доказательства как прямой, так и обратной теорем надо построить четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон трапеции.

41. Указание. Для доказательства достаточности можно из точки E медианы AE (рис. 104) провести $EF \parallel DC$ до пересечения с продолжением основания AC в точке F.

42. Необходимость. Дано: $a - b = b - c$. Доказать: $\operatorname{ctg}\frac{B}{2} - \operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \operatorname{ctg}\frac{C}{2} - \operatorname{ctg}\frac{B}{2}$.

Доказательство. Так как стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, то из условия $a - b = b - c$ получим $\sin A - \sin B = \sin B - \sin C$. Отсюда

$$2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2},\quad \sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)\cos\frac{\pi-C}{2} =$$

$$= \sin\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{\pi-A}{2},\quad \left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} =$$

$$= \left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}.$$

Разделив обе части последнего равенства на положительную величину $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, получим

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}-\operatorname{ctg}\frac{B}{2}.$$

Так как все операции обратимы, то справедлива и обратная теорема (достаточность).

43. а) $\frac{23}{99}$. б) $\frac{23}{99}$. в) $\frac{23}{99}$.

44. Указание. Воспользоваться правилом обращения периодической дроби в обыкновенную и доказать, что дробь $\frac{a_1a_2a_1a_2}{9999}$ сокращается на 101. Относительно знаменателя это очевидно. То, что числитель имеет множитель 101, легко доказать, представив числитель в виде $1000a_1+100a_2+10a_1+a_2=1010a_1+101a_2$. Далее понятно.

45. Указание. См. указание к упражнению 44.

46. $n-1$.

47. Нет. У него лишь мнимая часть положительна. Термины «положительное число», «отрицательное число» к комплексным числам неприменимы, как и понятия «больше» и «меньше».

48. $n=4k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Указание. Переписать равенство так: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1$.

49. $-32\,768$. Указание. $(1+i\sqrt{3})^3=-8$.

50. 7 Указание. $\alpha^3=1$, $\alpha^2=-(\alpha+1)$.

51. $1+(1+\sqrt{2})i$. Указание. Воспользоваться суммой геометрической прогрессии и равенством $\alpha^2=i$.

52. $\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$.

53. $-\frac{1}{\sin x}[\cos(x-\pi)+i\sin(x-\pi)]$. Указание. $\rho=\sqrt{\csc^2 x}=|\csc x|$, $0<x-\pi<\pi$.

54. $\cos 2(\alpha-\pi)+i\sin 2(\alpha-\pi)$. Указание. Данное выражение приводится к такому: $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$. Угол $2\alpha-2\pi$ удовлетворяет неравенствам: $-\pi<2\alpha-2\pi<-\frac{\pi}{2}$.

55. В концентрическом кольце, ограниченном окружностями радиусов 2 и 3 с центром в начале координат, исключая границы кольца.

56. Точки заполняют всю плоскость, исключая те из них, которые находятся на отрицательной части вещественной оси.

57. Точки находятся на прямой, параллельной вещественной оси, отстоящей от нее на расстоянии, равном 1, и расположенной выше этой оси.

58. Точки находятся в правой полуплоскости, ограниченной прямой, перпендикулярной вещественной оси и проходящей через точку $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, и на самой этой прямой.

59. а) Все вещественные числа, кроме $x=0$; 1; -1. б) $x<0$ и $x\geqslant 1$. в) Пустое множество. г) Все вещественные числа, кроме $x=0$; 1; -1. д) $0<x<\pi$ и $-4<x<-\pi$. Указание. Должны выполняться совместно неравенства: $-4<x<4$ и $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, где k — целое число.

60. а) $x<y$ и $x=-y$. б) $x-y=k\pi$, где k — целое число.

61. а) $1<x<3$. б) Все вещественные числа, кроме $x=\frac{2k-1}{2}\pi$; $k=0$,

$\pm 1, \ldots$ в) $x < 1$. г) $x \neq \frac{2k-1}{2}\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ д) Все вещественные числа, кроме $x = k\pi$.

62. xy и $3mn^2$.

63. Указание. Воспользоваться формулой $(m+n)^3 + (m-n)^3 = 2(m^3 + n^3)$.

64. Указание. Положить $a^3 + b^3 + c^3 = m$, $bc + ca + ab = n$, тогда левая часть примет вид $(m+n)^3 - (m+2n)m$.

65. $(a+b)(b+c)(c+a)$. Указание. $(a+b)(bc+ca+ab) + bc^2 + c^3a + abc - abc = (a+b)(bc+ca+ab) + c^3(a+b)$.

66. $(y-z)(z-x)(x-y)$.

67. $(x+y+z)(xy+yz+zx)$. Указание. $3xyz = xyz + xyz + xyz$.

68. $3(a+c)(a-c)(a^2+b^2)(b^2+c^2)$. Указание Первое слагаемое представить в виде $[(a^2-c^2)+(b^2+c^2)]^3$ и воспользоваться формулой $(m+n)^3 = m^3 + 3mn(m+n) + n^3$.

69. $(x-2)(x-3)(x^3+1)$. Указание. Сгруппировать второй член с четвертым.

70. $(x-2)(x+4)^2$.

71. $2(x-2)^3 + 3(x-2) + 3$.

72. $(a+1)x + a$.

73. $R = 574$.

74. $2x^3 + x^2 + 6x + 8$, $R = -6$. Указание. Составить схему Горнера.

75. $a = -7$, $b = -6$ Указание. Пользуясь теоремой Безу, написать остатки от деления многочлена на $x-2$ и на $x+1$ и приравнять их нулю.

76. $a = -2$, $b = 1$. Указание. Делить многочлены до получения в остатке многочлена первой степени, коэффициенты которого приравнять нулю.

77. $\pm(x^2+x+1)$, $a = 3$, $b = 1$. Указание. Искомый многочлен имеет вид $x^2 + px + q$. Квадрат его даст многочлен, тождественно равный данному.

78. $m = np$, где p — натуральное число. Указание. Полагая $m \geqslant n$, представим число m в виде $m = np + q$, где p и q — целые числа, причем $0 \leqslant q < n$. Тогда частное от деления данных выражений можно представить так.

$$\frac{a^m - 1}{a^n - 1} = a^q \cdot \frac{(a^n)^p - 1}{a^n - 1} + \frac{a^q - 1}{a^n - 1}.$$

79. Решение. Так как данный многочлен делится на $x - a$, то имеет место тождество $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = (x-a)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен степени $m-1$ с целыми коэффициентами. Полагая в этом тождестве $x = 1$, получим $a_0 + a_1 + \ldots + a_m = (1-a)Q(1)$, где $Q(1)$ — целое число. А это и означает, что сумма $a_0 + a_1 + \ldots + a_m$ делится на $a - 1$.

80. 0.

81. 1

82. $\frac{1}{1-x^2}$.

83. $\frac{m^3}{2(m-1)}$.

84. $A = 1$, $B = 3$, $C = -1$.

86. Большее число 18 Указание. Возведя в квадрат оба числа и сделав упрощение, а затем повторив операцию, получим: $80 \cdot 82 \vee 81^2$ или $81^2 - 1 < 81^2$.

87. 1.

88. 0 Указание. $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$, $\frac{\sqrt{xy}-x}{x\sqrt{x}-y\sqrt{x}}=$ $=-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

89. $\frac{1}{2a}$ Указание. Выражение, находящееся в квадратных скобках, сперва возвести в квадрат, а затем в степень -1.

90. $\sqrt[3]{x}$.

91. $-\frac{\sqrt{ab}}{2b^2}$.

92. 3. Указание. Воспользоваться формулой $(m-n)^3=m^3-$ $-3mn(m-n)-n^3$.

93. 1. Указание. Так как в выражение входит $\sqrt{1-x^2}$, то допустимые значения для x по абсолютной величине меньше 1 (но не равны нулю). Поэтому, положив во второй дроби $\sqrt{(1-x)^2}=1-x$ (а не $x-1$), ее можно сократить на $\sqrt{1-x}$. Первое слагаемое второго множителя можно записать так: $\sqrt{x^{-2}-1}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{-x}$, потому что $x<0$ и $\sqrt{x^2}=|x|=-x$.

94. 2. Решение. Данное выражение можно представить так: $\sqrt[n]{(x-1)^2}\left[\left(\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2-4\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right]+2=A$. Но $\frac{x+1}{x-1}=$ $=(2+\sqrt{3})^n$. Поэтому $A=\sqrt[n]{(x-1)^2}[(2+\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})+1]+$ $+2=\sqrt[n]{(x-1)^2}(4+4\sqrt{3}+3-8-4\sqrt{3}+1)+2=2$.

95. 2b. Решение. Преобразуем данное выражение так:

$$a\sqrt[n]{x^ka^{-k}}\left[\frac{x}{a}\sqrt[n]{\frac{a^kx^{-k}}{x^ka^{-k}}}+1-2\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt[2n]{\frac{x^n}{x^{2k}a^{n-2k}}}\right]+2b=$$

$$=a\sqrt[n]{x^ka^{-k}}\left[\frac{x}{a}\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{-2k}}+1-2\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt[2n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-2k}}\right]+2b=$$

$$=a\sqrt[n]{x^ka^{-k}}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{n}}+1-2\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}}\right]+2b=A.$$

Но

$$\frac{x}{a}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{n}{n-2k}}}=\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{b}{a}-1}\right)^{\frac{2n}{n-2k}}.$$

Отсюда

$$A=a\sqrt[n]{x^ka^{-k}}\left[\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{b}{a}-1}\right)^2+\right.$$

$$\left.+1-2\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{b}{a}-1}\right)\right]+2b=$$

$$=a\sqrt[n]{x^ka^{-k}}\left(\frac{b}{a}-2\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}-1}+\frac{b}{a}-1+1-2\cdot\frac{b}{a}+\right.$$

$$\left.+2\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}-1}\right)+2b=2b.$$

96. Решение.

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)=$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+3}{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}=$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}=$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

97. $x<0$.

98. $\frac{2+3a-ab}{2a}$. Указание $\log_4 39{,}2=\log_4\frac{49\cdot 4}{5}=\log_2\frac{7\cdot 2}{\sqrt{5}}$, $\log_2 7=\frac{1}{a}$.

99. Указание $\log_{ab}N=\log_a N:\log_a(ab)$; $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$.

100. Решение $\log_k n^2=\log_k(kn)^{\log_k m}$, $2\log_k n=\log_k m\,(1+\log_k n)$, $\frac{2}{\log_k m}=\frac{1}{\log_k n}+1$. Умножим полученное равенство на $\log_k x$, считая $x\neq 1$. Получим $2\cdot\frac{\log_k x}{\log_k m}=\frac{\log_k x}{\log_k n}+\log_k x$. Пользуясь формулой $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$, найдем $2\log_m x=\log_n x+\log_k x$ или $\log_m x=\frac{1}{2}(\log_n x+\log_k x)$. Если $x=1$, то доказываемое равенство очевидно, но в этом случае оно будет иметь место при любой зависимости между m, n и k.

101. Решение Так как $b^2=ac$, то $\log_b x=\frac{1}{\log_x b}=\frac{1}{\log_x\sqrt{ac}}=$

$=\frac{2}{\log_x a+\log_x c}=\frac{2\log_a x\log_c x}{\log_a x+\log_c x}$. Подставляя найденное значение $\log_b x$ в левую часть доказываемого равенства, получим

$$\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}=\frac{\log_a x(\log_a x+\log_c x)-2\log_a x\log_c x}{2\log_a x\log_c x-\log_c x(\log_a x+\log_c x)}=$$

$$=\frac{(\log_a x)^2-\log_a x\log_c x}{\log_a x\log_c x-(\log_c x)^2}=\frac{\log_a x(\log_a x-\log_c x)}{\log_c x(\log_a x-\log_c x)}=\frac{\log_a x}{\log_c x}.$$

102. а) При любых. б) $\frac{4k-1}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{4k+1}{2}\pi$. в) $\frac{4k+1}{2}\pi\leqslant x<(2k+1)\pi$ и $(2k+1)\pi<x\leqslant\frac{4k+3}{2}\pi$. г) При всех x, кроме $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ и $x=\frac{2k+1}{4}\pi$. д). При любых. е) При всех вещественных x, кроме $x=k\pi$.

103. Указание. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

104. 2.

105. $\sqrt{2}$.

106. Если угол острый, то тангенс больше синуса; если угол тупой, то синус больше тангенса; если угол прямой, тангенс не существует.

107. Если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg} 2\alpha > 2 \operatorname{tg} \alpha$ Если $\alpha > \frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg} 2\alpha < 2 \operatorname{tg} \alpha$.

108. $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$. Решение. $|\sin(\alpha + \beta)| = |\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta| \leqslant |\sin\alpha|\,|\cos\beta| + |\cos\alpha|\,|\sin\beta| < |\sin\alpha| + |\sin\beta|$.

Но синусы углов α, β и $\alpha + \beta$ положительны. Поэтому $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$. Следует иметь в виду, что если α — тупой угол, то $\cos\alpha < 0$. По этой причине мы пользовались абсолютной величиной при доказательстве.

109. $-2 \operatorname{tg} \alpha$. Указание. $\sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{(1 + \sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} = \frac{1 + \sin\alpha}{-\cos\alpha}$.

111. Указание. Сгруппировать первое и четвертое слагаемые.

112. Указание Сумму первых двух слагаемых преобразовать в произведение, третье записать так: $\sin 2n\gamma = 2 \sin n\gamma \cos n\gamma$. Затем положить $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

113. Указание. Преобразовать левую часть равенства так.

$$2[\sin(90° + 2\alpha) + \sin 30°] = 1 + 2\cos 2\alpha = 1 + \frac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

114. Указание. $\frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y} = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$.

115. $2\sin^2 x$

116. $\operatorname{tg}(45° + \alpha)$. Указание. $\sin 2\alpha = -\cos(90° + 2\alpha)$, $\cos 2\alpha = \sin(90° + 2\alpha)$.

117. $\frac{4\cos 20°}{\cos 30°}$. Указание. Сгруппировать первое слагаемое с последним, а второе с третьим.

118. $2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Указание. Положить $\sin^2\beta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta)$, $\sin^2\gamma = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\gamma)$.

119. $\frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha}$. Указание. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha - \sec^2\alpha = \frac{4\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$.

120 $\frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$. Указание. Возвести каждое равенство в квадрат и результаты сложить.

121. $\frac{\cos\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$. Указание. Данное выражение умножить и разделить на $2\sin\frac{\beta}{2}$.

122. $\frac{1}{2\sin^4 x \cos^6 x}$. Указание. Данное выражение можно преобразовать так: $\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^4}{2\sin^4 x \cos^6 x}$.

123. $(2k + 1)\pi < \alpha < (2k + 2)\pi$, $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ Указание.

$$\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{1 - \cos\alpha}{|\sin\alpha|} = \frac{1 - \cos\alpha}{-\sin\alpha}.$$

124. $\frac{2k+1}{2}\pi < \alpha < (k+1)\pi$.

125. $\frac{4\pi}{5}$. Указание. $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{17}{10}\pi\right) = \operatorname{arcctg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{5}{2}\pi - \frac{4\pi}{5}\right)\right]$.

126. $\frac{\pi}{8}$.

127. $\frac{24}{25}$. Указание. $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

128. $\frac{16}{65}$.

129—131. Указание. См. примеры 91 и 92, решенные в тексте этой главы.

132. Указание. Положив $\arcsin x = \alpha\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, получим $\cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}$

133. Указание. Положив $\operatorname{arctg} 2 = \alpha$, $\operatorname{arctg} 3 = \beta$, найти $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Отсюда получим, что $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

134. Не равносильны.

135. Не равносильны: первое имеет решение $x = -\frac{5}{3}$, а второе не имеет решения.

136. Равносильны.

137. Не равносильны. Первая имеет решение, в котором $x < 0$ и $y < 0$, а вторая не может иметь такого.

138. Равносильны.

139. Равносильны. Решение. Каковы бы ни были числа m_1, n_1, m_2, n_2, любое решение первой системы будет решением второй. Это следует из основных свойств равенств. Умножим первое равенство второй системы на n_2, а второе равенство на $-n_1$ и результаты сложим. Получим $(m_1n_2 - m_2n_1)A = 0$, а так как $m_1n_2 - m_2n_1 \neq 0$, то $A = 0$. Это значит, что всякое решение второй системы является решением первого уравнения первой системы. Но точно так же можно показать, что оно является и решением уравнения $B = 0$.

140. Является.

141. Одно.

142. Уравнение не имеет решений.

143. Уравнение удовлетворяется тождественно.

144. $x = \frac{a+b}{2}$, если $a - 3b + 1 \neq 0$. Если же $a - 3b + 1 = 0$, то уравнение удовлетворяется тождественно.

145. $x = m + n + p$, если $mn + np + pm \neq 0$. Если $mn + np + pm = 0$, то уравнение удовлетворяется тождественно. Указание. Уравнение приводится к такому: $x(mn + np + pm) = (m + n + p)(mn + np + pm)$. Преобразуя, полезно представить $3mnp = mnp + mnp + mnp$.

146. $x_1 = -2$, $x_2 = 7$.

147. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

148. $x = 12$.

149. $x = \frac{c+a}{c^2+ac+a^2}$, если $c \neq a$. Если же $c = a$, то уравнение удовлетворяется тождественно. Указание. Уравнение приводится к виду $(c^3 - a^3)x = c^2 - a^2$.

150. $x = \frac{3}{2a^2}$, если $a \neq 0$. Если $a = 0$, то уравнение удовлетворяется любыми вещественными значениями, кроме $x = 0$, т. е. тождественно удовлетворяется. Указание. Так как значения x и a подразумеваются вещественные, то только $x = 0$ является недопустимым. Знаменатели первых дробей, как неполные квадраты суммы и разности, не могут обратиться в нуль, точно так же и $a^4 + a^2x^2 + x^4 \neq 0$, поскольку $x \neq 0$. Освободив уравнение от знаменателей, придем к равносильному ему уравнению $2a^3x = 3a$.

151. $x = -(a + b)$, если $a \neq -b$. Если $a = -b$, то уравнение не имеет решения. Указание. Из уравнения видно, что $x \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Преобразование рационально вести так: дробь $\frac{a+x}{ax}$, $\frac{b+a}{ab}$, $\frac{x+b}{bx}$ представить в виде сумм: $\frac{1}{x} + \frac{1}{a}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{x}$, после чего собрать вместе дроби, имеющие в знаменателе x, затем дроби со знаменателем a и, наконец, дроби со знаменателем b. В результате уравнение приводится к такому: $\frac{2x^2}{x} + \frac{2a^2}{a} + \frac{2b^2}{b} = 0$.

152. $a = -8$, $b \neq 24$.

153. $a = 6$, $b = 21$.

154. Совместна.

155. $x_1 = 5$, $y_1 = 5$; $x_2 = 5$, $y_2 = 3$. Указание. $x - 3 = 1 + |y - 4| > 0$.

156. $x > 0$, $y = 1 - x$. Указание. Так как $y = 1 - |x|$, то $|x + y| = |1 + x - |x|| = 1$ и $x - |x| = 0$.

157 $x = \frac{(a-p)(a-q)}{a-b}$, $y = \frac{(b-p)(b-q)}{b-a}$.

158. $x = \frac{1}{(a-c)(b-c)}$, $y = \frac{1}{(a-b)(b-c)}$, $z = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$.

Указание. Умножить первое уравнение на $-a^2$, второе на a, третье на -1 и результаты сложить.

159. 1. Если $a + b + c \neq 0$ и числа a, b и c не все одинаковы, то единственное решение $x = y = z = 1$. Оно найдется обычным способом исключения неизвестных, если рассмотреть систему из двух первых уравнений и уравнения $x + y + z = 3$, которое получится сложением трех данных уравнений. 2. Если $a + b + c \neq 0$, но $a = b = c$, то любые три числа x, y и $z = 3 - x - y$ удовлетворяют системе, потому что в этом случае все три уравнения будут иметь вид $x + y + z = 3$. 3. Если $a + b + c = 0$, но не все числа a, b и c равны нулю (в этом случае система удовлетворялась бы тождественно), то, решая систему $ax + by - (a + b)z = 0$, $bx - (a + b)y + az = 0$, $-(a + b)x + ay + bz = 0$, в которой третье уравнение есть следствие первых двух, найдем, что любые три числа $x = y = z$ будут решением системы. При этом предполагается, что $a^2 + ab + b^2 \neq 0$, т. е. a, b и c вещественные. Если бы было $a + b + c = 0$ и $a^2 + ab + b^2 = 0$, то два уравнения данной системы были бы следствием третьего и поэтому любая тройка чисел x, y, z, удовлетворяющая уравнению $ax + by + cz = 0$, была бы решением системы.

160. $x_k = a_k + m_k t$, где $t = \frac{a - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Указание. Обозначить равные отношения буквой t и воспользоваться последним уравнением.

161. Решение. Складывая все три уравнения, получим $(a + 2) \times (x + y + z) = 1 + a + a^2$. Если $a \neq -2$, то $x + y + z = \frac{1 + a + a^2}{a + 2}$. Вычитая это уравнение из первого уравнения системы, найдем $(a - 1)x =$

$= 1 - \frac{1+a+a^2}{a+2}$, $(a-1)x = \frac{1-a^3}{a+2}$ и аналогично $(a-1)y = \frac{a-1}{a+2}$, $(a-1)z = \frac{(a+1)^2(a-1)}{a+2}$. При $a \neq 1$ $(a \neq -2)$ система имеет единственное решение: $x = -\frac{a+1}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$, $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$. Если $a = -2$, то $a^2 + a + 1 \neq 0$, и уравнение $(a+2)(x+y+z) = 1 + a + a^2$ противоречиво, а следовательно, и система противоречива. Если $a = 1$, то все три уравнения одинаковы, а именно $x + y + z = 1$. Системе удовлетворяют любые три числа: x, y, $z = 1 - x - y$

162. $x = 2$, $y = 3$ Указание Освободиться от знаменателя и воспользоваться определением равенства комплексных чисел.

163. $qy^2 + p(1+q)y + p^2 + q^2 - 2q + 1 = 0$

164. Указание $p^2 = 4q$, $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$

165. $5m^2 + 10m - 11 = 0$. Указание Чтобы написать это уравнение, значения m находить не требуется.

166. $a = -9$, $b = \frac{13}{2}$. Указание Коэффициенты одного уравнения должны быть пропорциональны соответствующим коэффициентам другого.

167. $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$

168. $a + b$, $\frac{a+b}{2}$

169. Если $a \neq b$, то $x_1 = a$, $x_2 = b$. Если $a = b$, то уравнение удовлетворяется тождественно (но в этом случае $x \neq a$)

170. $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 1 \pm 2i\sqrt{6}$ Указание Уравнение можно привести к квадратному: $(x^2 - 2x)^2 + 26(x^2 - 2x) + 25 = 0$.

171. $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{\sqrt{5} - 1 \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$;

$$x_{4,5} = \frac{-(\sqrt{5}+1) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

172. $x^4 + 10x^2 + 169 = 0$.

173. При $-1 \leqslant \frac{1}{n} < 1$ и при любых вещественных a и b, не равных нулю одновременно При $n = 1$ и любых a и b, не равных нулю порознь.

174. $-2i$, 1, 2

175. $x_1 = -2$; $x_{2,3} = \frac{3 + \sqrt{13} \pm \sqrt{6\sqrt{13} + 6}}{4}$;

$$x_{4,5} = \frac{3 - \sqrt{13} \pm i\sqrt{6\sqrt{13} - 6}}{4}.$$

176. 5, 6, 7, -4, -3

177. $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{3}$.

178. $x_1 = 2$, $y_1 = -3$; $x_2 = -\frac{7}{2}$, $y_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{3}$, $y_3 = \frac{5}{3}$; $x_4 = -11$, $y_4 = 7$.

179. $x_1 = 1$, $y_1 = 5$; $x_2 = 5$, $y_2 = 1$; $x_3 = 2$, $y_3 = 3$; $x_4 = 3$, $y_4 = 2$ Указание. Положить $x + y = u$, $xy = v$.

180. $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, $2x_2 = y_2 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$. Указание. Умножить

первое уравнение на 2, из результата вычесть второе уравнение и разделить на $x+y\neq 0$

181. $x_1=\frac{9}{4}$, $y_1=\frac{3}{8}$; $x_2=-\frac{21}{40}$, $y_2=\frac{63}{20}$. Указание. Второе уравнение приводится к квадратному относительно $\frac{x}{y}$.

182. $x_1=y_1=6$; $x_{2,3}=-\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{5})$; $y_{2,3}=-\frac{3}{2}(1\mp\sqrt{5})$. Указание. Воспользоваться вторым уравнением и записать первое в виде $x^2-xy+y^2=36$. Сделав теперь замену $x+y=u$, $xy=v$, придем к системе $u^2-3v-36=0$; $3u-v=0$.

183. $x_1=4$, $y_1=6$, $z_1=3$; $x_2=4$, $y_2=3$, $z_2=6$; $x_{3,4}=9$, $y_{3,4}=2\pm i\sqrt{14}$, $z_{3,4}=2\mp i\sqrt{14}$. Указание. Возвести в квадрат первое уравнение и вычесть второе. Из полученного уравнения $2xy+2yz+2zx=108$ вычесть третье. Новое уравнение $x(y+z)=36$, рассмотренное совместно с первым, позволит определить x и $y+z$.

184. $x_1=3$, $y_1=1$, $z_1=2$; $x_2=3$, $y_2=2$, $z_2=1$. Указание. Возвести третье уравнение в квадрат и из результата вычесть первое и удвоенное второе. Новое уравнение $yz=2$ рассмотреть совместно со вторым и третьим уравнениями.

185. $x_{1,2}=\pm\frac{np}{m}$, $y_{1,2}=\pm\frac{pm}{n}$, $z_{1,2}=\pm\frac{mn}{p}$. Знаки брать одновременно все верхние или все нижние. Указание. Сложить все уравнения и из результата $xy+yz+zx=m^2+n^2+p^2$ вычесть поочередно первое уравнение, затем второе и, наконец, третье. Из новой системы легко получить уравнение $xyz=\pm mnp$.

186. $x_1=15$, $x_2=-12$.

187. $x=5$.

188. $x_1=1$, $x_2=-4$.

189. $x=\pm 5$.

190. $x=5$.

191. $x=\frac{25}{16}$. Указание. Так как $x\neq 0$, то, разделив уравнение на $\sqrt[4]{x}$, придем к такому уравнению. $\sqrt{\sqrt{x}+1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}=\frac{3}{2\sqrt{\sqrt{x}+1}}$.

192. $x_1=-1$, $x_2=-2$. Указание. Вынести за скобки $\sqrt[3]{x+1}$.

193. $x=\frac{28}{27}$. Указание. $(m+n)^3=m^3+3mn(m+n)+n^3$.

194. $x=\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$, а при четном n еще такой же корень со знаком минус. Указание. Вынести из-под знака первого радикала $x^{\frac{n}{n+1}}$, а из-под знака второго $a^{\frac{n}{n+1}}$.

195. $x_1=5$, $y_1=3$; $x_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{981}+9}{2}}$, $y_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{981}-9}{2}}$. Указание. $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{|x-y|}$. Преобразовать первое уравнение, используя это равенство, и рассмотреть два случая: $x-y>0$ и $x-y<0$. При этом не нужно забывать, что $\sqrt{x^2-y^2}>0$.

196. $x_1 = 216$, $y_1 = 27$; $x_2 = -27$, $y_2 = -216$ Указание. Так как $x \neq y$, то, разделив числитель и знаменатель первого уравнения на $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ и сделав несложные преобразования, придем к уравнению, квадратному относительно $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$.

197. Играли. Указание. Если бы они не играли, то число участников x удовлетворяло бы уравнению $\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 11 = 55$ Это уравнение не имеет решений Если бы они играли между собой, то уравнение было бы такое: $\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 10 = 55$ Оно имеет решение $x = 12$

198. $\frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$ и $\frac{a\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$. Указание Число деталей x, изготовленных первым рабочим, удовлетворяет уравнению

$$\frac{p}{a-x} \cdot x = \frac{q}{x}(a-x)$$

199. 6 *час* 47 $\frac{119}{143}$ *мин*; 9 *час* 33 $\frac{141}{143}$ *мин*. Указание. Пусть часовая стрелка к началу собрания отошла от своего положения в 6 *час* на x градусов, а в момент окончания собрания переместилась по отношению к своему положению, соответствующему 9 *час*, на y градусов За время от 6 *час* до начала собрания минутная стрелка прошла дугу величиной в $270 + y$ градусов, часовая — величиной в x градусов Но часовая стрелка за это время проходит дуговой путь в 12 раз меньший, чем минутная. Поэтому получаем уравнение $270 + y = 12x$ Если аналогично подсчитывать пути, пройденные минутной и часовой стрелками от 9 *час* до окончания собрания, то получим уравнение $180 + x = 12y$ Отсюда найдем $x = \frac{3420^\circ}{143}$, что соответствует $3\frac{141}{143}$ *мин*.

200 $\frac{2a+b}{2}\left[\frac{1}{t-t_0} + \frac{a}{t(a+b)+at_0}\right]$, $\frac{2a+b}{2}\left[\frac{1}{t-t_0} - \frac{a}{t(a+b)+at_0}\right]$. Указание. Если x *км/ч* — скорость лодки в стоячей воде, а y *км/ч* — скорость течения воды, то x и y удовлетворяют системе $\frac{a}{x+y} + \frac{a}{x-y} = t$; $\frac{a-b}{x+y} + t_0 + \frac{2b}{x+y} = \frac{a}{x-y}$.

201. 300 руб Указание. Вклад x руб. и проценты y удовлетворяют системе $\frac{xy}{100} = 15$, $(x + 15 + 85)\left(1 + \frac{y}{100}\right) = 420$.

202. 9 *час*, 10 *час* 3 *мин*, 11 *час* 6 *мин*, 12 *час* 9 *мин*. Указание. Если x *км/ч* — скорость поезда, когда он движется в гору, то имеет место уравнение

$$\frac{100}{x+10} + \frac{100}{x} = 12\frac{42}{60} - 8 - \frac{12}{60}.$$

203 $\frac{2a+b+\sqrt{4a^2+b^2}}{2}$, $\frac{2a-b+\sqrt{4a^2+b^2}}{2}$. Указание Время x *час*, в течение которого второй пешеход проходит путь AB, удовлетворяет уравнению $\frac{a}{x} + \frac{a}{x+b} = 1$.

204. 20 и 60 Указание. Процентное содержание x меди в первом сплаве удовлетворяет уравнению $\left(\frac{6\cdot 100}{x}+\frac{12\cdot 100}{x+40}\right)\frac{36}{100}=18$.

205. 5 *км/ч* Указание. Пусть x *км/ч* — скорость течения реки (и движения плота). Время движения плота от A до B равно $\frac{20}{x}$ *км*. Когда лодка вышла вслед за плотом, то плоту еще осталось двигаться до конечного пункта $\left(\frac{20}{x}-2\frac{2}{5}\right)$ *час*. За это время лодка успела догнать плот и вернуться в A, так как она пришла в A одновременно с прибытием плота в B. Поэтому она нагнала плот за $\frac{1}{2}\left(\frac{20}{x}-2\frac{2}{5}\right)$ *час*. За это время лодка прошла $20\left(\frac{20}{x}-2\frac{2}{5}\right)\frac{1}{2}$ *км*. Такой же путь прошел и плот, но за время $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{20}{x}-2\frac{2}{5}\right)+2\frac{2}{5}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{20}{x}+2\frac{2}{5}\right)$ *час*. Этот путь, следовательно, можно записать еще и так: $x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{20}{x}+2\frac{2}{5}\right)$ *км*. Таким образом, для x получаем уравнение $20\left(\frac{20}{x}-2\frac{2}{5}\right)\frac{1}{2}=x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{20}{x}+2\frac{2}{5}\right)$.

206. $2ak$ *км/ч*. Указание. Путь x — расстояние между A и B в километрах. До первой встречи первый велосипедист прошел $(x+a)$ *км*, а второй — $(x-a)$ *км*. Если их скорости v_1 и v_2, то, приравняв время движения до встречи, получим $\frac{x+a}{v_1}=\frac{x-a}{v_2}$. Аналогично составим второе уравнение $\frac{2x+\frac{x}{k}}{v_1}=\frac{2x-\frac{x}{k}}{v_2}$. Отсюда $\frac{x+a}{x-a}=\frac{2k+1}{2k-1}$.

207. $x=7$

208. $x=-1$. Указание. Разделить уравнение на $9^{-\frac{1}{x}}\neq 0$. Получится квадратное уравнение относительно $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

209. $x=9$. Указание. $\left(\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}+1\right)\frac{2}{\sqrt{x}-1}=2$

210. $x_1=-1$, $x_2=-100$. Указание. $\sqrt{2\lg(-x)}=\lg(-x)$.

211. $x=16$

212. $x_1=5$, $x_2=\sqrt[5]{5}$.

213. $x=2$

214. $x_1=a^{\frac{4}{3}}$, $x_2=a$. Указание. Воспользоваться формулами $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$ и $\log_a N=\log_{a^n}N^n$. Тогда уравнение приведется к такому: $3\log_a^2 x-7\log_a x+4=0$

215. $x=1$. Указание. Потенцируя, получаем

$$120\cdot 5^{x-3}=(1-5^{x-3})^2\cdot\frac{1}{0{,}2-5^{x-4}}.$$

216. $x=2$. Указание. Потенцируем:

$$\frac{1}{100}\left(3^{\sqrt{4x+1}}-\frac{16}{2^{\sqrt{4x+1}}}\right)=\frac{2}{4^{\frac{1}{2}\sqrt{4x+1}}}.$$

217. $x_1=\frac{1}{32}$, $x_2=2$. Указание. Прологарифмировать уравнение.

218. $x=5$. Указание. Воспользоваться тождеством $a^{\log_a z}=z$

219. $x=3$, $y=2$ Указание. Прологарифмировав оба уравнения по основанию 3 и разделив один результат на другой, получим:

$$\frac{y+1}{2y-5}=-3,\ \log x\neq 0.$$

220. $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $y=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

221. $x_1=4$, $x_2=1$, $y_1=1$, $y_2=9$ Указание. Система приводится к следующей $\sqrt{xy}=4-\sqrt{x}$; $2\sqrt{xy}=3+\sqrt{y}$.

222. $x=1$, $y=3$ Указание. Из второго уравнения найдем $y=4-x$

223. $x=\left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg b}{\lg b-\lg a}}$, $y=\left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg a}{\lg b-\lg a}}$. Указание. Множество допустимых значений x и y определится из условий $x>0$, $y>0$. Числа a и b должны быть оба больше единицы или оба меньше единицы, иначе система не будет иметь решений. Прологарифмировать оба уравнения и результаты перемножить. Тогда найдем $x=y^{\frac{\lg b}{\lg a}}$.

224. $x_1=y_1=1$, $z_1=\frac{18}{5}$, $x_2=\frac{1}{81}$, $y_2=\frac{1}{9}$, $z_2=\frac{4}{5}$. Указание. Из первого уравнения найдем $x=y^{\frac{8}{5z}}$ и подставим во второе. Тогда получим: 1) $y=1$; 2) $\frac{z}{3}=\frac{16}{75z}$

225. $x_1=\frac{2k+1}{8}\pi$, $x_2=\frac{2}{3}k\pi\pm\frac{\pi}{9}$.

226. $x_1=\frac{2k+1}{4}\pi$, $x_2=\frac{2k+1}{8}\pi$.

227. $x_1=\frac{14}{15}k\pi$, $k\neq 15n$, $x_2=\frac{7}{17}(2k+1)\pi$, $k\neq\frac{17n-1}{2}$.

228. $x_1=\frac{2k+1}{2}\pi$, $x_2=\frac{k\pi}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{12}$. Указание. Раскрыть скобки в правой части и второе слагаемое перенести в левую часть уравнения. Тогда получим $\sin 3x-\cos x=-\sin x$.

229. $x=\frac{2k+1}{4}\pi$.

230. $x_1=k\pi$, $x_2=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}$.

231. $x_1=k\pi-\frac{\pi}{4}$, $x_2=k\pi$

232. $x=\frac{2k+1}{4}\pi-\alpha$. Указание. Переносим $\sin^2\alpha$ в левую часть уравнения и затем преобразуем так:

$$\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos 2\alpha}{2}-\cos(x+\alpha)[\cos(x+\alpha)+\cos(x-\alpha)]+$$
$$+\sin^2(\alpha+x)=0.$$

233. $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$ Указание Переписав уравнение в виде $\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=\frac{29}{16}\cos^4 2x$, после простых преобразований придем к уравнению $24\cos^4 2x-10\cos^2 2x-1=0$.

234 $x=2k\pi\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}\pm\frac{\pi}{4}$ Указание. Перепнсать уравнение в виде $\sin(\pi\cos x)-\cos(\pi\sin x)=0$, привестн левую часть к внду, удобному для логарифмирования Тогда придем к двум уравненням $\cos x+\sin x=\frac{4k+1}{2}$ н $\cos x-\sin x=\frac{4k+1}{2}$ Нужно показать, что из всех целых k можно взять только $k=0$

235. $x=k\pi-(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\pi}{4}$ Указание Положить $\sin x+\cos x=y$

236. $x=\frac{1\pm\sqrt{25+4k\pi}}{2}$; $k=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Указание $\operatorname{tg}(x^2-x)=\operatorname{tg}6$, $x^2-x=6+k\pi$, $x^2-x-(6+k\pi)=0$ Прн этом должно быть $25+4k\pi\geqslant 0$

237. $x_1=1$, $y_1=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$; $x_2=-1$, $y_2=2m\pi+\frac{3}{2}\pi$, $n, m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Указание $[x^2+2x\sin(xy)+\sin^2(xy)]+\cos^2(xy)=0$, $[x+\sin(xy)]^2+\cos^2(xy)=0$ Отсюда $\cos(xy)=0$ н $x+\sin(xy)=0$. Из первого получим $xy=k\pi+\frac{\pi}{2}$, а нз второго $x=-\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$. Затем рассмотреть случан $k=2n$ и $k=2n+1$.

238. $x=\frac{1}{4}$

239. Не имеет решенний Указание. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ и $|\arcsin x|<\frac{\pi}{2}$.

240. $x_1=y_1=0$; $x_2=y_2=\frac{\pi}{2}$; $x_3=y_3=\pi$; $x_4=0$; $y_4=\pi$, $x_5=\pi$, $y_5=0$ Указание $x+y=k\pi$, $x-y=n\pi$; $x=\frac{k+n}{2}\pi$, $y=\frac{k-n}{2}\pi$ Отсюда $0\leqslant k+n\leqslant 2$, $0\leqslant k-n\leqslant 2$.

241. $x>\frac{8}{5}$.

242. $x>-1$.

243. $1<x<3$. Указание. $-x<2x-3<x$.

244. x — любой, $y>2x+3$

245. $x>2$.

246. Не имеет решенний

247. $1<x<7$.

248. $x>1$, $4-2x<y<3x-1$.

249. $x<2$, $y>-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$; $x>2$, $y>\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$.

250. $0 < x < 1$.

251. $x < 3$ Указание. Разложить многочлен на множители.

252. $-1 < x < 0; \frac{1}{2} < x < 1; x > 2$.

253. $3 < x < 4$.

254. $\frac{1+\sqrt{13}}{6} \leqslant x < 1; x \geqslant 2$.

255. $a < -\frac{1}{3}$.

256. $4 - 2\sqrt{11} < m < 4 + 2\sqrt{11}$.

257. Указание Сложить неравенства: $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$, $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$.

258. Указание. $a = (a-b) + b$

260. Указание. Положим $a_1 = x^3$, $a_2 = y^3$, $a_3 = z^3$. Тогда неравенство примет вид $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant xyz$ или $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geqslant 0$. Но $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geqslant 0$

261. Указание $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{a^4+b^4}{2} + \frac{b^4+c^4}{2} + \frac{c^4+a^4}{2} \geqslant$ $\geqslant \sqrt{a^4b^4} + \sqrt{b^4c^4} + \sqrt{c^4a^4} = a^2\frac{b^2+c^2}{2} + b^2\frac{c^2+a^2}{2} + c^2\frac{a^2+b^2}{2}$.

262. Указание Обозначим данную дробь буквой A. Получим $A < \frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{13}{15}\cdots\frac{4n-3}{4n-1}\cdot\frac{4n+1}{4n+3} = 3\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{4n+3} < \frac{1}{A}\frac{4}{4n} = \frac{1}{nA}$. Отсюда $A^2 < \frac{1}{n}$, $A < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

264. $\frac{1}{2} < x < 2$.

265. $0 < x < \frac{1}{8}$; $1 < x < 2$. Указание Освободившись от знаменателя ($x > 0$) и прологарифмировав по основанию 2, придем к неравенству $t(1-t)(3+t) > 0$, где $t = \log_2 x$.

266. $x > \log_8 2$.

267. $k\pi + \frac{\pi}{3} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{4}$. Указание Должно быть $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$ или $\operatorname{tg} x < 1$.

268. $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$. Указание. Неравенство равносильно такому: $-1 \leqslant \cos x < 0$

269. $(2k-1)\pi < x < \left(2k - \frac{3}{4}\right)\pi$; $\left(2k - \frac{1}{4}\right)\pi < x < 2k\pi$, $\left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi < x < \left(2k + \frac{3}{4}\right)\pi$. Указание. Рассмотреть интервалы, ограниченные смежными корнями уравнения $\sin x - \sin 3x = 0$.

270. $0 < x \leqslant \operatorname{tg}\frac{1}{\pi}$.

271. $2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{3}$

273 Указание Левую часть неравенства можно преобразовать к такому виду $2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

274. Указание.

$$1+\operatorname{ctg}\varphi=1+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}=\frac{2-\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-1\right)^2}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-1\right)^2.$$

275. Указание. $a\cos\alpha+b\sin\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{b}$

276. 1 Указание. Данное выражение можно привести к следующему виду: $1-(\log_3 x-1)^2$.

277. а) $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. б) $(-\infty, 0)$, $[1, 2]$, $(4, +\infty)$. в) $[1, +\infty)$ и $x=0$.

278. а) $(-\infty, 0)$ и $[1, +\infty)$ б) $(0, +\infty)$. в) $[1, +\infty)$.

279. а) $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. б) $(1, +\infty)$. в) $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

280. а) $(-\infty, +\infty)$. б) $[-1, 0]$.

281. а) $\left[\frac{k\pi}{2}, \frac{2k+1}{4}\pi\right)$. б) $(2k\pi, 2k\pi+\pi)$. в) Все вещественные числа, кроме $x=0$ и $x=\frac{1}{k\pi}$.

282. Промежуток возрастания $(-\infty, +\infty)$

283. Промежуток возрастания $(-\infty\ 0)$, промежуток убывания $(0, +\infty)$.

284. Промежутки убывания $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. Промежуток возрастания $(-1, 1)$

285. В промежутке $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ убывает В промежутке $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает. Функция периодическая с периодом π

286. а) Четная б) Нечетная в) Четная. г) Четная.

287. а) $\frac{\pi}{2}$. б) 6π. в) 40π г) $\frac{\pi}{3}$ д) $\pi\sqrt{2}$.

288. Указание. Область определения $(-\infty, +\infty)$, график симметричен относительно оси ординат Функция убывает в промежутке $(0, \sqrt{3})$ и возрастает в промежутке $(\sqrt{3}, +\infty)$ При $x=0$ имеем $y=5$, при $x\to+\infty$ функция $y\to+\infty$. Наименьшее значение функции $y=0{,}5$.

289. Указание. $y=1-\frac{2x}{x^2+1}$ Построить график функции $-\frac{2x}{x^2+1}$ и сдвинуть на 1 в направлении положительных ординат. Функция $-\frac{2x}{x^2+1}$ определена в области $(-\infty, +\infty)$, нечетная, убывает в промежутке $(0, 1)$, возрастает в промежутке $(1, +\infty)$, стремится к нулю, когда $x\to+\infty$.

290. Указание. В промежутках $(-\infty, -2)$ и $(3, +\infty)$ график функции совпадает с графиком параболы $y=x^2-x-6$, а в промежутке $[-2, 3]$ — с ее зеркальным отображением в оси абсцисс.

291. Указание. Построить график функции $\sin 2x$ (см. пример 250), увеличить ординаты в три раза и сдвинуть полученную линию в направлении отрицательных абсцисс на величину $\frac{\pi}{8}$.

292. Указание. Сложить ординаты графиков показательных функций $y=2^x$ и $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, соответствующие одинаковым абсциссам.

293. $x_1 \approx -0{,}7$; $x_2 \approx 2{,}1$. Указание. Построить графики функций $y = \frac{1}{10}x^4$ и $y = \frac{7x+5}{10}$.

294. $x \approx 0{,}7$.

295. $R\sqrt{2}$. Указание. $DM = \sqrt{DE^2 + ME^2} = \sqrt{(OL+LE)^2} + \sqrt{(OL-LE)^2}$, где L — середина DC.

296. Одна из сторон $a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$. Указание. Продолжить отрезок OK, где O — середина стороны $BC = a$ и K — центр тяжести треугольника ABC, на отрезок $OL = OK$ и, соединив K и L с C и B, рассмотреть параллелограмм $KBLC$.

297. $\frac{2ab}{a+b}$. Указание. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, O — точка пересечения диагоналей AC и BD, KL — искомый отрезок. Рассмотреть $\triangle KOA$, подобный $\triangle BAC$, и $\triangle BKO$, подобный $\triangle BAD$.

298. $4c\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$. Указание. Опустить перпендикуляр из центра третьей окружности на линию центров двух других и определить расстояние от его основания до точки касания этих окружностей.

299. $\frac{R}{6}$. Указание. Искомый радиус x найдется из уравнения $(R+x)^2 - (R-x)^2 = (R-x)^2 - x^2$.

300. Одна из сторон $MN = \frac{2(p-c)r}{\sqrt{r^2 + (p-c)^2}}$, где p — полупериметр треугольника, а r — радиус вписанного в треугольник круга. Указание. Соединить центр O вписанной в треугольник ABC окружности с вершиной C треугольника и с точкой M касания стороны AC с окружностью. Сторона MN (где N — точка на прямой BC) от $\triangle MCO$ отсечет $\triangle OMQ \sim \triangle MCO$.

301. $a^2(2-\sqrt{3})$. Указание. Фигура, площадь которой требуется определить, состоит из двух равных равнобедренных треугольников.

302. $\sqrt{R^2 + S} - R$. Указание. Если из центра вписанной окружности провести радиусы в точки касания ее с катетами, то они и отрезки катетов образуют квадрат.

303. $\sqrt{S_1 S_2}$. Указание. $LK^2 = AK \cdot KB$, где K — проекция C на AB. Но $AK \cdot KB = CK \cdot HK$, так как $\triangle AHK \sim \triangle CKB$. Отсюда искомая площадь $S = \frac{1}{2}AB \cdot LK = \frac{1}{2}AB\sqrt{CK \cdot HK}$.

304. $h^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Указание. Угол между диагональю трапеции и основанием равен $\frac{\alpha}{2}$, проекция диагонали на основание равна средней линии.

305. $R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

306. $\frac{a^2}{18}(3\sqrt{3} - \pi)$. Указание. Проведем из центра O окружности $OP \perp AB$, где AB — сторона данного треугольника ABC и P — середина AB. Получим $\triangle OPM \sim \triangle ACP$. Отсюда легко доказать, что четырехугольник $OMAN$ (где M и N — ближайшие к A точки пересечения окружности со сторонами AB и AC) — ромб.

307. $\frac{3}{2}R^2(7 - 4\sqrt{3})(2\sqrt{3} - \pi)$. Указание. Соединить центры трех вписанных окружностей. Получим правильный треугольник со сторо-

ной $2r$, где r — радиус вписанной окружности Ответ дан для той из четырех возможных фигур, площадь которой наименьшая

308 $\pi r_1 r_2$

309. $\cos x = \dfrac{R-r}{R+r}$, где x — искомый угол.

310 Указание Продолжим OB, которая является медианой и биссектрисой $\triangle ABC$, на отрезок $OD = OB$ и точку D соединим с A и C Четырехугольник $ABCD$ — ромб

311. Указание. Пусть A — точка, из которой проведены перпендикуляр AE и наклонные AB и AC ($AB < AC$) к данной прямой EC Если D — середина EB, то $\triangle ADB \backsim \triangle ADC$ (по второму признаку подобия)

312. Указание Если в $\triangle ABC$ сторона $AB < AC$, то и $BD < DC$, где D — основание высоты AD Но тогда и $BO < OC$, где O — точка пересечения высот треугольника

313 Указание. Если A, B, C — вершины параллелограмма, O — точка пересечения диагоналей и D — середина стороны BC, то отрезки AD и BO — медианы $\triangle ABC$

314 Указание Пусть AD и BE — высоты $\triangle ABC$, O — точка их пересечения, OK и OL — диаметры окружностей, проходящих соответственно через точки A, O, B и B, O, C. Точки L, B, K лежат на одной прямой, так как $\angle OBL = \angle OBK = 90°$ Треугольник KOL равнобедренный, так как $\angle K = \angle OAB = \angle OCB = \angle L$

315. Если число сторон многоугольника четное, то равносторонний многоугольник может быть и неправильным (например, ромб), если нечетное — правильным Указание Если A_1, A_2, , A_{2n+1} — вершины многоугольника, а B_1, B_2, , B_{2n+1} — точки касания сторон A_1A_2, A_2A_3, . , $A_{2n+1}A_1$ с вписанной окружностью, то, доказав, что $A_1B_1 = A_3B_3 = A_5B_5 = \ . = A_{2n+1}B_{2n+1}$ и $\triangle OA_1B_1 = \triangle OA_2B_1$, где O — центр вписанной окружности, установим равенство всех углов многоугольника

316 Будет Указание Углы многоугольника равны.

317 Окружность диаметра AB с центром в середине O отрезка AB, исключая точки A и B. Указание. Треугольник AMB — прямоугольный.

318 Прямая (или часть прямой), перпендикулярная к линии центров данных окружностей и отстоящая от середины отрезка $O_1O_2 = d$ на расстояние $\dfrac{r_1^2 - r_2^2}{2d}$, где r_1 и r_2 — радиусы данных окружностей, а O_1 и O_2 — их центры

319 Две окружности, концентрические с данными, радиусов $r_1 = \dfrac{R+r}{2}$ и $r_2 = \dfrac{R-r}{2}$, где R и r — радиусы данных окружностей

320 Указание Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе a и катету h_b, после чего построить сегмент с основанием a, вмещающий угол A

321 Указание Рассмотреть случай пересечения данных прямых (два решения или ни одного) и случай их параллельности (одно решение).

322 Указание Пусть A и B — данные точки Проведем окружность через A и B так, чтобы она пересекла данную окружность, и пусть M и N — их точки пересечения Из точки P пересечения прямых MN и AB проведем касательные PQ и PQ_1 к данной окружности (Q и Q_1 — точки касания) Искомая окружность будет проходить через A, B, Q (A, B, Q_1). Впрочем, точка P может не существовать, а решение будет Вообще решений может быть два, одно и ни одного

323 Указание Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе β_a и катету h_a

324. $\dfrac{abc}{2\sqrt[4]{2}\cos 22°30'}$

325. $\dfrac{25}{36}S$. Указание. Использовать свойства параллельных сечений в пирамиде.

326. $\dfrac{5m^2 \operatorname{tg} 36° \cos\alpha}{4\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}$.

327. $\dfrac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\sqrt[3]{36V^2\operatorname{ctg}^2\alpha}$. Указание $S_{бок}=\dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$

328 $\dfrac{a^3\cos\dfrac{\alpha}{2}}{3\sqrt{-2\cos\alpha}}$ Указание. Провести плоскость через диагональ основания и перпендикуляр к боковому ребру, опущенный из центра основания. Эти ребро и плоскость будут перпендикулярными. После этого все нужные величины можно выразить через a и α. Объяснить, почему $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$ ($\cos\alpha < 0$).

329 $\dfrac{a^3}{6}\sin^3\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\varphi$ Указание. Трапеция, лежащая в основании, равнобедренная; радиус описанного около нее круга равен $\dfrac{1}{2}a$.

330 $\dfrac{\pi\left(3+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt[3]{\dfrac{9}{\pi^2}V^2\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$. Указание $V=\dfrac{1}{3}\pi x^2 x\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, откуда находится радиус x основания конуса. Радиус y основания отсеченного конуса определится из соотношения $\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, где S — боковая поверхность данного конуса, а S_1 — отсеченного.

331. $l\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right)$

332. $\cos\dfrac{x}{4}=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$, где x — искомый угол. Указание. Если обозначить радиус сферы y, то объем сектора будет равен $\dfrac{4}{3}\pi y^3\sin^2\dfrac{x}{4}$, а объем конуса $\dfrac{1}{3}\pi y^3\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}$.

333 $\dfrac{4R\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{4+\operatorname{tg}^2\alpha}$ Указание. Продолжить высоту пирамиды до пересечения с поверхностью сферы и точку пересечения соединить с вершиной основания. Из полученного таким образом прямоугольного треугольника легко определить радиус окружности, описанной вокруг основания пирамиды.

334 $\dfrac{m\sin\alpha}{4\cos\left(30°+\dfrac{\alpha}{4}\right)\cos\left(30°-\dfrac{\alpha}{4}\right)}$ Указание. Объем пирами-

ды равеи $\frac{1}{3}$ произведения полной поверхиости иа раднус вписанного в эту пирамнду шара

335 $\frac{2R^2(1+\sqrt{-\cos\alpha})^3}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\alpha}}$ Указание. Если обозиачить двугранный угол при ребре основания буквой φ, то нскомая поверхность легко определяется через φ н R Чтобы найти угол φ, следует рассмотреть квадрат $KLFE$, где K, L, F, E — точки касания шаровой поверхностн с боковыми гранями пирамнды, и четырехугольник $OEPF$, где O — центр шара, а P — точка пересечения бокового ребра с плоскостью OEF Угол EPF равен α

336. $\frac{a^3}{6}$ Указание Получится правильный восьмигранник (октаэдр) Он состоит из двух равных правильных пирамид высотой $\frac{1}{2}a$

337. Указание. Взять любую точку внутри пирамиды и соединить ее со всеми вершинами пирамиды.

338. Указаиие Через данную точку провести прямую, параллельную линиям пересечения плоскостей, и рассмотреть множество всех плоскостей, проходящих через эту прямую (пучок плоскостей)

339. Указание Через середину ребра параллелепипеда, не вошедшего в ребра отсечениого тетраэдра, но исходящего из вершины тетраэдра, провести плоскость, параллельную секущей плоскости

340. Указание Провести плоскость, проходящую через середины двух ребер тетраэдра, исходящих из одной вершины, параллельно третьему ребру, исходящему из той же вершины При доказательстве иметь в виду, что угол между противоположнымн ребрами тетраэдра — прямой

341. Если точкн не лежат на одной прямой, то это будет перпеидикуляр к плоскости треугольника с вершинами в данных точках, восставленный из центра круга, опнсаниого около этого треугольника Если точки лежат на одной прямой, то задача не имеет решения

342. Сфера, концентрическая с данной, радиуса $\frac{\sqrt{6}}{2}R$, где R — радиус данной сферы Указание Пусть M принадлежит геометрическому месту $MA=MB=MC$ и $\angle AMB=\angle AMC=\angle BMC=90°$, причем A, B и C — точки касания прямых MA, MB и MC со сферой. Если O — центр шара, то радиус OM определим, подсчитав площадь $\triangle AMO$ двумя способами: один раз как произведение катетов, а другой раз как произведенне гипотенузы на соответствующую высоту.

343. Указание Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную данной прямой

344. Нет.

345. 55.

346. 343 Указание. $a_1+a_{21}=98$

347. 25 Указание Общий член первой прогрессии имеет вид $2+3(m-1)=3m-1$, а второй $-1+4(n-1)=4n-5$. Из равенства $3m-1=4n-5$ видим, что $m=n-1+\frac{n-1}{3}$, и должно быть $\frac{n-1}{3}=k$ или $n=3k+1$, а $m=4k$. Так как в прогрессиях по 101 члену, то одинаковых будет 25 В первой прогрессии последним из одинаковых будет 100-й член, а второй — 76-й

348. $a_{14}=30$, $b_{14}=29$ Указание Из равенства $2n+2=85-4n$ находим $n=13\frac{5}{6}$. Наиболее близкое целое число 14

349. $\frac{2}{9}\left(10\frac{10^n-1}{9}-n\right)$

350. 1, 2, 4, 8, . , 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, . Указание Разделить равенство $(a_1+a_1q+a_1q^2)^2=7^2$ на $a_1^2+a_1^2q^2+a_1^2q^4=21$.

352. $A=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $B=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. Указание $\dfrac{z_{k+1}}{z_k}=\cos x+i\sin x$

353. Да, если $a_1=a_2=a_3$. Если бы эти числа были первым, вторым и третьим членами арифметической прогрессии и первым, третьим и вторым членами геометрической прогрессии, то это возможно и при неравных a_1, a_2, a_3. Например, $2, \frac{1}{2}, -1\left(d=-\frac{3}{2}\right)$; $2, -1, \frac{1}{2}\left(q=-\frac{1}{2}\right)$.

354. $14, \frac{21}{2}, \frac{63}{8}, \ldots$

355. $q=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

356. 6. Указание Из цифр 1, 1, 2 можно составить $\frac{P_3}{P_2}$ различных трехзначных чисел и столько же из цифр 1, 2, 2.

357. 48 Указание Количество однозначных чисел A_3^1, двузначных $A_4^2-A_3^1$; трехзначных $A_4^3-A_3^2$; четырехзначных $A_4^4-A_3^3$

358. 24

359. $m=34$, $n=14$.

360. $6x^2$.

361. $-\frac{28}{27}x^5$.

362. Указание $C_{2n}^n=2C_{2n-1}^{n-1}$.

363. $T_9=C_{12}^8\ 3^4\ 5^8\ x^4$

364. $C_{16}^4=1820$ Указание Данное выражение есть геометрическая прогрессия, сумма которой равна $\frac{1}{x}[(1+x)^{16}-(1+x)^3]$

366. Указание $S_k=S_{k-1}+k^4=\frac{k}{30}[(k-1)(2k-1)(3k^2-3k-1)+30k^3]=\frac{k}{30}[(k-1)(2k-1)(3k^2+3k-1)-6k(k-1)(2k-1)+30k^3]=\frac{k}{30}[(k-1)(2k-1)(3k^2+3k-1)+6k(3k^2+3k-1)]$

369. Указание $S_{k+1}=S_k+\cos(2k+1)x=\dfrac{\sin 2kx}{2\sin x}+\cos(2k+1)x=\dfrac{\sin 2kx+2\sin x\cos(2k+1)x}{2\sin x}=\dfrac{\sin 2kx+\sin 2(k+1)x-\sin 2kx}{2\sin x}=\dfrac{\sin 2(k+1)x}{2\sin x}$.

370. Указание. $(1+i\sqrt{3})^{k+1}=(1+i\sqrt{3})^{k}(1+i\sqrt{3})=$
$=2^{k}\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2^{k+1}\left[\cos\frac{(k+1)\pi}{3}+\right.$
$\left.+i\sin\frac{(k+1)\pi}{3}\right]$.

372. Указание $S_{k+1}=S_{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2(\sqrt{k+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=$
$=2(\sqrt{k+1}-1)+\frac{2}{2\sqrt{k+1}}>2(\sqrt{k+1}-1)+\frac{2}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}=$
$=2(\sqrt{k+1}-1)+\frac{2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}{(k+2)-(k+1)}=2(\sqrt{k+1}-1)+$
$+2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})=2(\sqrt{k+2}-1)$.

Ответы, указания и решения к приложению

1. Указание $3^{4n+2}+1=9^{2n+1}+1$.
2. Указание. $2^{8n+6}+1=4^{4n+3}+1$.
3. Указание. $7^{2n}-4^{2n}=49^n-16^n$
4. Данное число $a=125\cdot 25^n+27\cdot 6^n=(6\cdot 19+11)25^n+(2\cdot 19-11)6^n=19(6\cdot 25^n+2\cdot 6^n)+11(25^n-6^n)$ Можно доказать и так: числа 25 и 6 при делении на 19 дают одинаковые остатки, равные 6 Поэтому и числа $a=125\ 25^n+27\cdot 6^n$ и $m=125\cdot 6^n+27\cdot 6^n$ при делении на 19 также дадут равные остатки (см. задачу 564). Но $m=152\cdot 6^n=19\cdot 8\cdot 6^n$
5. Указание. $a=15\ 5^{2n}+2\cdot 2^{3n}=(17-2)5^{2n}+2\cdot 2^{3n}=17\cdot 5^{2n}-2(25^n-8^n)=17\cdot 5^{2n}-2(25-8)A$
6. Делится на 2, 4, 8 и не делится на 16
7. Так как n — нечетное число, то $n-1$ и $n+1$ — два последовательных четных числа. Поэтому одно из них делится на 2, а другое на 4 Из трех последовательных целых чисел $n-1$, n, $n+1$ одно делится на 3, причем это не число n
8. Указание $a=n^3-n+12n=(n-1)n(n+1)+6\cdot 2n$.
9. Указание Положив $n=2k$, получим $a=8k^3+40k=8k(k^2+5)=8k(k^2-1+6)=8(k-1)k(k+1)+48k$.
10. Указание $n^5-5n^3+4n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ Среди пяти последовательных целых чисел есть кратные 5, 4, 3, 2
11. Указание $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n=3n(n^2+2)=3n(n^2-1+3)=3(n-1)n(n+1)+9n$
12. $-\sqrt[3]{4}<a<0$, $a=-\dfrac{1+a^3}{a}$. Указание. Выполнив деление данного многочлена на двучлен $x-a$ по обычным правилам, найдем частное x^2+ax+a^2+a (*) и остаток a^3+a^2+1. Ответ получим, решив уравнение $a^3+a^2+1=0$ относительно a и неравенство $a^2+\dfrac{4}{a}<0$ относительно a, где $a^2+\dfrac{4}{a}$ — дискриминант трехчлена (*)
13. Данное выражение $A=nx^n(x-1)-(x^n-1)=(x-1)(nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\ \ -1)=(x-1)f(x)$, причем $f(1)=0$
14 Корни x_i $(i=1,\ 2)$ трехчлена x^2+x+1 удовлетворяют уравнению $x^2+x+1=0$ или $x^3=1$ Поэтому $x_i^{3m}+x_i^{3n+1}+x_i^{3p+2}=x_i^{3m}+x_i^{3n}x_i+x_i^{3p}x_i^2=1+x_i+x_i^2=0$ Следовательно, по теореме Безу данный многочлен делится на $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+x+1$.
15. Указание Данный многочлен $P(x)=(x^{2n+1}+1)^2$.
16. Положим $x=a+y$. Если подставить это значение x в данный многочлен $P(x)$ и привести подобные члены, то получим многочлен относительно y в таком виде· $P(x)=P(a+y)=A+By+Cy^2+Dy^3$ (*), где A, B, C, D — некоторые коэффициенты, причем $A=1+a+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^3}{6}$ и $B=1+a+\dfrac{a^2}{2}=A-\dfrac{a^3}{6}$ Для того чтобы $P(x)$ делился без остатка на $(x-a)^2$, необходимо и достаточно, чтобы многочлен (*) делился на y^2, т е чтобы было $A=0$ и $A-\dfrac{a^3}{6}=0$ Но это невозможно, так как, если $A=0$ и $A-\dfrac{a^3}{6}=0$, то и $a=0$. Однако при $a=0$ будет $A=1$.

17. $(x^2+12x+24)(x^2+13x+24)$ Указание. Умножить первый множитель на четвертый, а второй — на третий и положить $y=x^2+11x+24$

18. Умножим первый множитель на четвертый, а второй — на третий и положим $x^2-7x+6=y$ Получим $y(y+6)+10=y^2+6y+10=(y+3)^2+1>0$.

19. Так как $r=p+q$, то $r^2=p^2+2pq+q^2$, $(2pq)^2=(r^2-p^2-q^2)^2$, $4p^2q^2=r^4+p^4+q^4+2p^2q^2-2q^2r^2-2r^2p^2$, $2(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2)=p^4+q^4+r^4$ (*) Остается к обеим частям равенства (*) прибавить величину $2(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2)$

20. Указание. Подставить значения a, b, c, выраженные через k, m, n, в левую часть данного равенства, произвести умножение и затем воспользоваться задачей 19

21. Если $x\geqslant y\geqslant 0$, то левая часть доказываемого равенства $A=x+y+x-y=2x=2|x|=2M$ Случай $x<y<0$ приводится к предыдущему заменою $x=-z$, $y=-t$. К нему же сводится и случай $xy<0$ заменою $x=-z$ или $y=-z$ Равенство просто доказывается и возведением в квадрат его обеих частей

22. Умножим первое равенство на q^2, второе — на p^2, третье — на $-2pq$ и результаты сложим Получим $(a_1q-b_1p)^2+(a_2q-b_2p)^2+(a_3q-b_3p)^2=0$. Но тогда $a_1q-b_1p=a_2q-b_2p=a_3q-b_3p=0$, откуда и следует доказываемое равенство

23. Представим частное от деления данных многочленов в виде

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}:\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{(x^n)^2-1}{x^n-1}\cdot\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x^n+1}{x+1}$$

Отсюда видно, что для делимости без остатка n должно быть нечетным числом.

24. Указание Возвести в квадрат первое равенство и результат возведения записать так:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xyz}{abc}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=1$$

25 $\dfrac{m+n+p}{2}$

26 $\dfrac{5}{1+x^2}$. Указание Раскрыв скобки, получим $\dfrac{5(1+x^2)^4}{(1+x^2)^5}$.

27. $x+y+z$

28. Левая часть $A=\dfrac{(a^2x^2-1)(y^2-1)x}{(a^2x^2-1)(y+1)}+1=(y-1)x+1=a^2$.

29. Сложив две первые дробн, получим $\dfrac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}$. Положив здесь и в третьей дроби $y=x^2$, снова придем к сумме таких же дробей, как первая и вторая, но относительно y Эта сумма даст $\dfrac{y^4-y^2+1}{y^4+y^2+1}=\dfrac{x^8-x^4+1}{x^8+x^4+1}$.

30. Здесь предполагается $|x|\geqslant|y|$ Пусть $x\geqslant y\geqslant 0$. Тогда $x-\sqrt{x^2-y^2}\geqslant 0$ и левая часть доказываемого равенства $A=x+y+x-y=(x+\sqrt{x^2-y^2})+(x-\sqrt{x^2-y^2})=|x+\sqrt{x^2-y^2}|+|x-\sqrt{x^2-y^2}|$. Случай $x<y<0$ сводится к рассмотренному, если положить $x=-z$, $y=-t$. Случай $x<0$, $y\geqslant 0$ (и $x\geqslant 0$, $y<0$) при $|x|\geqslant|y|$ также приводится к рассмотренному заменою $x=-z$ (и соответственно $y=-z$) Равенство можно доказать и возведением в квадрат его обеих частей

31. Если $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, то левая часть доказываемого равенства $A=\frac{1}{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y=|x|+|y|$. Случай

$x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$ приводится к предыдущему, если положить $x = -z$, $y = -t$ Равенство можно доказать и возведением в квадрат его обеих частей.

32. $3 - 2x$ Указание. Данное выражение $A = \sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt{x^2} = |x-3| + |x|$

33. $\frac{1}{m}$ Указание $\sqrt{a \pm bx} = \sqrt{\frac{a(1 \pm m)^2}{1+m^2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+m^2}}(1 \pm m)$

34. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2+1}$. Указание $\sqrt{m^2-1} = \frac{1}{2}\left|x - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)$

35. $\frac{\sqrt{ab}}{a}$

36. $\sqrt[s]{a^r} + 2$

37. $2\sqrt{5} + 6$

38. Указание Числитель и знаменатель умножить на $(x - \sqrt{x^2-1}) \times$ $\times (y - \sqrt{y^2-1})$

39. Указание Левая часть $A = x\sqrt{x}\sqrt{1-x^3} = \sqrt{x^3(1-x^3)} =$

$$= \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2-b^2}}{2a} \cdot \frac{a + \sqrt{a^2-b^2}}{2a}} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2}} = \frac{|b|}{2a}$$

40. Указание Возвести левую часть равенства в квадрат, заменить в результате x^4 числом 5, после чего сократить полученную дробь

41. Указание. $4x^3 - 3x - 1 = (4x^3 - 4) - (3x - 3) = (x-1)(4x^2 + 4x + 1) = (x-1)(2x+1)^2$; $4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(2x-1)^2$

42. 5 Указание $2^x + 2^{-x} = y$, $4^x + 4^{-x} = y^2 - 2$

44 — 45. Указание Заменить $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$

52. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg} x = \frac{1-\cos x}{\sin x} + \frac{2\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x - \cos^2 x + 2\sin^2 x}{\sin x \cos x} =$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x - 2\cos 2x}{\sin x \cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x} - \frac{4\cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{ctg}\frac{x}{2} - 4\operatorname{ctg} 2x$$

Отсюда $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$

53. Указание $\operatorname{tg} 7{,}5° + \operatorname{tg} 37{,}5° = \operatorname{tg}(7{,}5° + 37{,}5°)(1 - \operatorname{tg} 7{,}5° \operatorname{tg} 37{,}5°)$.

54. Указание $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

55 Пусть $\alpha = \frac{\pi}{24}$, $\beta = \frac{3}{8}\pi$. Тогда $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha) + (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta) =$

$$= 2\operatorname{ctg} 2\alpha - 2\operatorname{ctg} 2\beta = \frac{2\sin(2\beta - 2\alpha)}{\sin 2\beta \sin 2\alpha} = \frac{2\sin\frac{2}{3}\pi}{\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{3}{4}\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi - \cos\frac{5}{6}\pi\right)} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 2(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}.$$

56. Указание. Положить $\sin^6 \frac{k\pi}{8} = \frac{1}{8}\left(1 - \cos \frac{k\pi}{4}\right)^3$, где $k = 1, 3, 5, 7$

57. Рассмотреть $S \cos 6^\circ \cos 18^\circ$, где S — левая часть доказываемого равенства.

58 — 59. Указание. Для преобразования левой части равенства воспользоваться формулами. $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$, $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

60. Указание Умножить левую часть равенства на $2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$ и каждое произведение преобразовать в разность косинусов

61. Указание Рассмотреть $S \sin x$, где S — левая часть доказываемого равенства, и воспользоваться формулами для суммы косинусов и разности тангенсов

62. $\frac{1}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}}$ Указание. Рассмотреть $S \sin \frac{\pi}{2^n}$, где S — левая часть доказываемого равенства

63. 0 Указание К данной сумме прибавить такую же, расположив слагаемые в обратном порядке и сгруппировав парами слагаемые, стоящие на одинаковых местах.

64. 0,125 Указание Умножить и разделить данное выражение на $\sin 20^\circ$.

65. 4. Указание. Сгруппировать первое слагаемое с четвертым, а второе с третьим

66. 5. Указание $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

67. 11.

68. $\frac{\pi}{4} + k\pi$ Указание Найти $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

69. 3 Указание $2 \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma - 1}{\operatorname{ctg}(\alpha + \gamma)}$.

70. $x = -2$ Указание Рассмотреть случаи изменения x в промежутках $(-\infty, -2]$, $(-2, -1]$, $(-1, 0]$, $(0, +\infty)$

71 $-3 \leqslant x \leqslant -2$, $2 \leqslant x \leqslant 3$ Указание. Положив $y = x^2$, придем к уравнению $|y - 9| + |y - 4| = 5$ Рассматривая далее для y промежутки $(-\infty, 4)$, $[4, 9]$, $(9, +\infty)$, получим соответственно $13 - 2y = 5$; $5 = 5$; $2y - 13 = 5$. Из этих равенств следует, что решения y удовлетворяют условию $4 \leqslant y \leqslant 9$

72. Если $\beta < -\frac{57}{32}$, то уравнение не имеет решений Когда $-\frac{57}{32} < \beta < -\frac{7}{4}$, а также когда $\beta > 12$, уравнение имеет два решения: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57 + 32\beta}}{8}$, причем если $\beta = -\frac{57}{32}$, то $x_1 = x_2 = -\frac{5}{8}$. При $-\frac{7}{4} < \beta < 12$ уравнение имеет тоже два корня: $x_1 = \frac{2}{11}(\beta - 1)$ и $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{57 + 32\beta}}{8}$ Решение. Так как $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \times (x - 2)$, то этот квадратный трехчлен неотрицательный при $x \leqslant -\frac{1}{2}$

и $x > 2$ и отрицательный, когда $-\frac{1}{2} < x < 2$. Рассмотрим теперь два случая

I. Пусть $x < -\frac{1}{2}$ или $x \geqslant 2$ Тогда данное уравнение примет вид $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = -x^2 - 4x + \beta$ или $4x^2 + 5x - 2(1+\beta) = 0$ (1) Дискриминант этого квадратного уравнения $d = 57 + 32\beta$ Если $d < 0$, т е. если $\beta < -\frac{57}{32}$, то уравнение (1) не имеет решений (вещественных) Но это значит, что и данное уравнение не имеет решений, удовлетворяющих условию $x < -\frac{1}{2}$ или $x \geqslant 2$. Однако из дальнейшего исследования будет ясно, что при $\beta < -\frac{57}{32}$ данное уравнение вообще не имеет решений Если $d \geqslant 0$, т е. если $\beta \geqslant -\frac{57}{32}$, то уравнение (1) имеет два решения $x_1 = \frac{-5-\sqrt{57+32\beta}}{8}$ и $x_2 = \frac{-5+\sqrt{57+32\beta}}{8}$ (2), которые совпадают при $\beta = -\frac{57}{32}$ Но при этом x_1 и x_2 должны удовлетворять соотношениям $x < -\frac{1}{2}$ или $x \geqslant 2$ Выполнение неравенства $x_1 < -\frac{1}{2}$ при всех $\beta \geqslant -\frac{57}{32}$ очевидно, точно так же, как и невозможность неравенства $x_1 \geqslant 2$. Остается установить границы изменения β, в которых выполняются неравенства $x_2 < -\frac{1}{2}$ и $x_2 \geqslant 2$ Остановимся на первом Учитывая формулы (2), имеем $\frac{-5+\sqrt{57+32\beta}}{8} < -\frac{1}{2}$, $\sqrt{57+32\beta} < 1$, $57 + 32\beta < 1$, $\beta < -\frac{7}{4}$, т е. при $-\frac{57}{32} \leqslant \beta < -\frac{7}{4}$ данное уравнение имеет два корня x_1 и x_2 Если $x_2 \geqslant 2$, то опять на основании формул (2), получим $\frac{-5+\sqrt{57+32\beta}}{8} \geqslant 2$, $\sqrt{57+32\beta} \geqslant 21$, $57 + 32\beta \geqslant 441$, $\beta \geqslant 12$, т е при $\beta \geqslant 12$ снова имеем два корня x_1 и x_2, определяемые формулами (2).

II Пусть $-\frac{1}{2} < x < 2$ Тогда данное уравнение имеет вид $-x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = -x^2 - 4x + \beta$ или $11x + 2 - 2\beta = 0$ (3). Из уравнения (3) находим, что $x = \frac{2}{11}(\beta - 1)$ Подставив найденное x в неравенство $-\frac{1}{2} < x < 2$, получим, что $-\frac{1}{2} < \frac{2}{11}(\beta - 1) < 2$, $-\frac{7}{4} < \beta < 12$, а так как в этом случае $\beta > -\frac{57}{32}$, то при $-\frac{7}{4} \leqslant \beta < 12$ данное уравнение имеет два корня $x_1 = \frac{2}{11}(\beta - 1)$ и $x_2 = \frac{-5+\sqrt{57+32\beta}}{8}$

73. $2 < m < 5$.

74. $m < -1$ и $m > -\frac{3}{8}$.

75. $-1 < m < 3$.

76. $a < -4-2\sqrt{5}$. Указание. Искомые значения a найдутся из системы неравенств $-\frac{1}{a} < 1$; $\frac{4-8a}{a} > a$.

77. $-\frac{7}{2} < k < -3$. Указание. Нужно решить систему неравенств: $(k+3)^2 - 4(k+3) > 0$; $k+3 > -\frac{1}{2}$. Второе неравенство получится, если левую часть данного уравнения представить в виде $(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения, и положить в ней $x = \frac{1}{2}$. Это даст $\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\times$ $\times\left(\frac{1}{2}-x_2\right) > 0$ или $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(k+3) + (k+3) > 0$, если воспользоваться теоремой Виета.

78. $x = -\frac{1}{6}$ и $x = \frac{3}{2}$.

79. $a_1 = 2$, $a_2 = 0$. Указание. Пусть y — корень первого уравнения, а z — второго, тогда $z = 3y$. Подставив y вместо x в первое уравнение и $3y$ во второе, получим систему уравнений $y^2 - 3y + a = 0$; $3y^2 - 5y - a = 0$. Исключив y^2, найдем что $y = a$. Но тогда a определится из первого уравнения.

80. $0 < a < \frac{\pi}{3}$.

81. $m_1 = -4$, $m_2 = 0$.

82. $a = -12$, $b = 6$. Указание. Подставить в левую часть уравнения $x = 1 + \sqrt{3}$ и, отделив в результате рациональную и иррациональную части приравнять каждую из них нулю.

83. $x_1 = 2$, $x_2 = 9$, $x_{3,4} = \frac{11 \pm i\sqrt{15}}{2}$. Указание. Умножить первый множитель на четвертый, второй — на третий, а затем положить $x^2 - 11x + 24 = y$.

84. $x_{1,2} = a \pm b$. Указание. Второе слагаемое из левой части перенести в правую, а первое из правой — в левую.

85. Если $a \neq b$, то $x_{1,2} = \frac{1}{2}(a+b \pm \sqrt{a^2 - 6ab + b^2})$, $x_3 = 0$, $x_4 = a+b$. Если $a = b$, то любая пара чисел x и y является решением уравнения.

86. $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \frac{-19 \pm i\sqrt{3}}{26}$.

87. $x_1 = 6$, $x_2 = -\frac{33}{4}$.

88. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{cd-ab}{a+b-c-d}$. Указание. Сгруппировать первые члены обеих частей уравнения, а затем — вторые. Нужно проверить, что x_1 и x_2 принадлежат области допустимых значений.

89. $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{5}{2}$. Указание. Начать с выделения целой части каждой дроби.

90. $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{13}{32}$. Указание. См. указание к задаче 89.

91. $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{5}{2}$. Указание. См. указание к задаче 89.

92. Если $a \neq b$ и $a \neq 4b$, то $x_1 = \frac{1}{3}(a+2b)$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{ab}$; если $a \neq b$, но $a = 4b$, то $x = 2b$, если $a = b$, то уравнение не имеет решения

93. $x_1 = 6$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{21}$. Указание. Положить $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = y$.

94. $x_1 = 8$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$. Указание. Положить $y = 4x + \frac{8}{x}$.

95. Если $b > \sqrt{2}$, то $x = \sqrt[3]{\left(\frac{b^2+2}{2b}\right)^2}$; если $b < \sqrt{2}$, то решений нет. Указание. Положив $y = x^3$, получим $\sqrt{y-2} = b - \sqrt{y}$. Условие существования корня получим исходя из требования $2 < y < b^2$ и $b > 0$.

96. Если $-2 < a < 0$ или $a > 2$, то $x = \frac{a^2+4}{2a}$. При иных значениях a уравнение не имеет решений. Указание. Положив $\sqrt{x^2-4} = y > 0$, придем к системе уравнений $x + y = a$, $x^2 - y^2 = 4$, из которой (так как $a \neq 0$) найдем $x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{4}{a}\right)$, $y = \frac{1}{2}\left(a - \frac{4}{a}\right)$. Так как для найденного x неравенство $x^2 \geqslant 4$ выполняется при любом a, то соотношения для a получим из неравенства $\frac{1}{2}\left(a - \frac{4}{a}\right) > 0$.

97. $x_1 = \frac{190}{63}$, $x_2 = \frac{2185}{728}$. Указание. Разделим обе части уравнения на $\sqrt[6]{(x-2)(x-3)} \neq 0$ и затем положим $\sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}} = y > 0$. Тогда придем к уравнению $6y + \frac{1}{y} = 5$.

98. $x_1 = 0$, $x_2 = a - b$, $x_3 = \frac{a-b}{2}$.

99. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + a\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)$. Это значение неизвестного должно удовлетворять условию $x^2 \geqslant a$.

100 $x_1 = 0$, $x_2 = a - b$.

101 $x_1 = a$, $x_2 = b$.

102. $z = \frac{\sqrt{3}}{3} + i$. Указание. Положив $z = x + iy$, придем к уравнению $(\sqrt{x^2+y^2} + x) + iy = \sqrt{3} + i$, эквивалентному данному.

103. Если $0 < a < \sqrt{2} - 1$, то $z_{1,2} = a - i(1 \pm \sqrt{1 - 2a - a^2})$. При иных положительных a уравнение не имеет решений. Указание. Пусть $z = x + iy$. Тогда $|z|^2 = x^2 + y^2$ и данное уравнение приводится к системе уравнений $x^2 + y^2 + 2y + 2a = 0$, $-2x + 2a = 0$.

104. Если $a = 1$, то $z = -1 - i$. Если $1 < a < \sqrt{2}$, то $z_{1,2} = \frac{-a^2 \pm a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1} - i$. При иных $a > 1$ уравнение не имеет решений. Указание. Если $z = x + iy$, то $|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ и данное уравнение приводится к системе $x + a\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 0$, $y + 1 = 0$.

105. Если $a > \frac{1}{2}$, то $z = \frac{4a + \sqrt{4a^2+3}}{4(4a^2-1)} + \frac{i}{4}$. При иных $a \geqslant 0$ уравнение не имеет решений. Решение. Положив $z = x + iy$, придем к системе $2\sqrt{x^2+y^2} = 4ax - 1$, $-4y + 1 = 0$. Из первого уравнения видно, что при $a = 0$ уравнение не имеет решений и что должно быть $4ax - 1 > 0$, т. е. $x > \frac{1}{4a} > 0$ Возведя в квадрат первое уравнение, получим квадратное уравнение $(16a^2 - 4)x^2 - 8ax + \frac{3}{4} = 0$ Здесь $16a^2 - 4 \neq 0$, так как в противном случае было бы $a = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4 \cdot 8a} = \frac{3}{32a} < \frac{1}{4a}$, что невозможно. Решив квадратное уравнение, найдем $x_1 = \frac{4a + \sqrt{4a^2+3}}{4(4a^2-1)}$ и $x_2 = \frac{4a - \sqrt{4a^2+3}}{4(4a^2-1)}$ (*) Если $0 < a < \frac{1}{2}$, то $x_1 < 0$, а должно быть $x > 0$, так что в этом случае x_1 — посторонний корень При $a > \frac{1}{2}$ в формуле для x_1 числитель больше $4a$, в то время как знаменатель меньше $16a^2$ Поэтому $x_1 > \frac{4a}{16a^2} = \frac{1}{4a}$ и x_1 дает решение уравнения Значение x_2 — посторонний корень Действительно, освободившись в равенстве (*) от иррациональности в числителе, получим $x_2 = \frac{3}{4(4a + \sqrt{4a^2+3})} < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4a} < \frac{1}{4a}$, а должно быть $x_2 > \frac{1}{4a}$

106. $z = \frac{a - \sqrt{a^2+4}}{2} i$. Решение Положив $z = x + iy$, придем к системе $x\sqrt{x^2+y^2} + xa = 0$; $y\sqrt{x^2+y^2} + ay + 1 = 0$ Так как $a > 0$, то $\sqrt{x^2+y^2} + a > 0$ ($x = y = 0$ не удовлетворяют системе) Поэтому уравнение дает $x = 0$. Но тогда второе уравнение принимает вид $y|y| + ay + 1 = 0$ При $y > 0$ получим $y^2 + ay + 1 = 0$, которое не имеет положительных корней Если же $y < 0$, то получим уравнение $y^2 - ay - 1 = 0$, которое имеет только один отрицательный корень $y = \frac{a - \sqrt{a^2+4}}{2}$

107 $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = 0$, $y_2 = -3$; $x_3 = -6$, $y_3 = 9$ Указание. Рассмотреть случаи. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$; $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$; $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$.

108. $x_1 = 11$, $y_1 = 4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 11$, $x_{3,4} = -8 \pm 2\sqrt{5}$, $y_{3,4} = -8 \mp 2\sqrt{5}$.

109. $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y_{1,2} = 0$; $x_{3,4} = y_{3,4} = \pm 1$ Указание Из второго уравнения вычесть удвоенное первое.

110. $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$, $y_{1,2} = 1 \mp \sqrt{3}$; $x_{3,4} = -1 \pm i$, $y_{3,4} = -1 \mp i$.

111. $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$; $x_{3,4} = 1 \pm \frac{5}{2} i$, $y_{3,4} = 1 \mp \frac{5}{2} i$ Указание. $x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = [(x+y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2$.

112. $x_1 = -1$, $y_1 = -2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, $x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $y_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{3}$; $x_{5,6} = -1 \pm i\sqrt{3}$, $y_{5,6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ Указание. Разделить первое уравнение на второе

113. $x_1 = 6$, $y_1 = 3$; $x_2 = 4$, $y_2 = 4$

114. Если $a = -1$, то $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $y_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ Если $a = 0$, то $x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $y_2 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ Если $a = 1$, то $x_3 = 1$, $y_3 = -1$ При иных a система не имеет решений Указание. Заменив в первых двух уравнениях y на $-x$, придем к эквивалентной системе $2x^3(1+a) = (1+a)^3$; $x^3(2-a) = 1$, $y = -x$ (*) Если $a = -1$, то первое уравнение системы (*) удовлетворится тождественно, а из второго и третьего найдем x_1 и y_1 Если $a \neq -1$, то, так как $a \neq 2$, из первых двух уравнений получим $x^3 = \frac{a+1}{2}$ и $x^3 = \frac{1}{2-a}$. Отсюда $\frac{a+1}{2} = \frac{1}{2-a}$ и $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, что даст x_2, y_2 и x_3, y_3

115 $(a+b)^{\frac{2}{3}} + (a-b)^{\frac{2}{3}} = 2$. Указание Умножим первое уравнение на y, второе на x, результаты сложим и попутно воспользуемся третьим уравнением. Тогда получим $y^3 + 3x^2y = a$ (*) Затем умножим первое уравнение на x, второе на y, из второго результата вычтем первый, используя третье уравнение. Придем к равенству $3xy^2 + x^3 = b$ (**). Сложив равенства (*) и (**), а затем, вычтя из первого второе, получим $(x+y)^3 = a+b$ и $(y-x)^3 = a-b$. Остается каждое из последних равенств возвести в степень $\frac{2}{3}$ и результаты сложить

116. $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0$ Указание. Перемножив первые три равенства и воспользовавшись четвертым, придем к равенству $(x+y)(y+z) \times (z+x) = abc$ Если левую часть последнего соотношения преобразовать то убедимся, что она равна $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 2xyz = a^3 + b^3 + c^3 + 2abc$.

117. $a = b = -2$. Решение Если при некоторых a и b тройка чисел (x_1, y_1, z_1) является решением данной системы, то очевидно и тройка чисел $(-x_1, -y_1, z_1)$ также есть решение этой системы Следовательно, если система имеет единственное решение, то оно должно иметь вид $(0, 0, z_1)$. Но тогда, подставив в систему $x = 0$, $y = 0$, $z = z_1$, найдем, что должно быть $z_1 = a$, $z_1 = b$, $z_1^2 = 4$. Таким образом, для существования единственного решения системы *необходимо*, чтобы $a = b = \pm 2$ *Достаточно ли* этого? Чтобы ответить на поставленный вопрос, умножим первое уравнение системы на $z \neq 0$, вычтем из результата второе уравнение, а затем положим сначала $a = b = 2$, а затем $a = b = -2$ Получим $z^2 - 3z + 2 = 0$ и $z^2 + z - 2 = 0$. Корни этих уравнений соответственно $z = 1$, $z = 2$ и $z = 1$, $z = -2$. Если в данной системе положить $z = 1$ и $z = 2$ (при этом $a = b = 2$), то это приведет к таким двум системам $xy = 1$; $xy = 1$; $x^2 + y^2 = 3$ и $xy = 0$; $xy = 0$; $x^2 + y^2 = 0$ Но уже первая из этих двух систем имеет больше одного решения, так что $a = b = 2$ должно быть отброшено Полагая в данной системе $z = 1$ и $z = -2$ (при этом $a = b = -2$), придем к следующим двум системам $xy = -3$; $xy = -3$; $x^2 + y^2 = 3$ и $xy = 0$; $xy = 0$; $x^2 + y^2 = 0$. Первая из них не имеет вещественных решений, а вторая с учетом $z = -2$ даст единственное решение $(0, 0, -2)$.

118. Указание. Так как $y + z = x(x^2 - 1)$ и $yz = x^2$, то для y и z справедливо квадратное уравнение $t^2 - x(x^2-1)t + x^2 = 0$ (*) Искомое соотношение для x найдется из условия вещественности корней уравнения (*)

119. $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{8}$, $y_{1,2}=\pm\sqrt[4]{2}$; $x_{3,4}=\pm\sqrt[4]{\frac{27}{4}}$, $y_{3,4}=\pm\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$; $x_{5,6}=\mp i\sqrt[4]{8}$, $y_{5,6}=\pm i\sqrt[4]{2}$; $x_{7,8}=\pm i\sqrt[4]{\frac{27}{4}}$, $y_{7,8}=\mp i\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$.

Указание. Второе уравнение умножить на 6 и вычесть из первого. Положив в получением уравнении и во втором из данных $y=kx$, найдем $6k^4-5k^2+1=0$ и $x^2k(1-k^2)=1$. Из них определим $k_1^2=\frac{1}{2}$, $k_2^2=\frac{1}{3}$ и x.

120. $x=4$, $y=16$.

121. $x=y=1$. Указание. $x^2+y^2=[(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-2\sqrt{xy}]^2-2xy=(4-2\sqrt{xy})^2-2xy$.

122. $x_1=9$, $y_1=25$; $x_2=25$, $y_2=9$. Указание. Положив $\sqrt{x}+\sqrt{y}=u$, получим $u+\frac{1}{u}=\frac{65}{8}$.

123. 30 *км*. Указание. Искомое расстояние $2y$ *км* и скорость x *км/ч* движения первой группы пешком связаны уравнениями: $\frac{y}{20}+\frac{35}{60}=1+\frac{y-(x-1)}{30}$ и $\frac{y}{x}=\frac{y}{30}+\frac{35}{60}+1\frac{25}{60}$.

124. 3 *час*. Указание. Пусть первая машинистка может напечатать первую главу в течение x *час*, а вторая — в течение y *час*. Тогда получим систему $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18}$, $\frac{8}{x}+\frac{6}{y}=2$. Искомое число часов равно $\frac{1}{3}y$.

125. 1000. Указание. Число x поданных заявлений и число y мест выделенных для приема, удовлетворяют следующей системе: $\frac{8}{9}\left(\frac{17}{18}\ \frac{90}{100}\times\right.$ $\left.\times\frac{80}{100}x-5\right)=2y$, $y=\frac{3}{2}\cdot\frac{20x}{100}$.

126. 20 *км*. Указание. Искомое расстояние x *км* и скорость y *км/ч* второго лыжника удовлетворяют системе $\frac{15}{10}=\frac{15}{y}+\frac{15}{60}$, $\frac{x}{10}=\frac{30-x}{y}+\frac{15}{60}+\frac{55}{60}$.

127. 20 *км/ч* и 12 *км/ч*. Указание. Если x *км/ч* — скорость катера, то $(x+8)$ *км/ч* — скорость парохода. Поэтому, положив скорость течения реки, равной y *км/ч*, можем написать $(x+8)+y=1{,}5(x+y)$, $(x+8)-y=2(x-y)$.

128. 10 *км*. Указание. Если искомое расстояние есть x *км*, то первый турист проходит путь AB за $\left(2{,}5-\frac{5}{60}x\right)$ *час*. Поэтому получим уравнение $\left(2{,}5-\frac{5}{60}x\right)+\frac{2}{5}\left(2{,}5-\frac{5}{60}x\right)+\frac{10}{60}=2{,}5$.

129. На 10 *мин*. Указание. Если s *км* — длина пути AB и x *км/ч* — скорость второго автобуса, то искомое время t *час* найдется так: $t=\frac{s}{x+2x}-\frac{s}{2x+2x}=\frac{s}{12x}$, причем $\frac{s}{x}-\frac{s}{2x}=1$.

130. 1 *км/ч*. Указание. Если x *км/ч* — скорость течения реки, а y *км/ч* — собственная скорость лодки, то x и y удовлетворяют системе $\frac{4(x+y)}{y-x}=6;\ \frac{4(x+y)-12}{3y+x}=\frac{3}{4}$.

131. 30 *км/ч* Указание Пусть x *км/ч* — скорость первой автомашины, а y *км/ч* — второй Так как третья автомашина проходит $120+40=160$ (*км*) за то же время, за которое вторая проходит $120-40=80$ (*км*), то скорость третьей автомашины $2x$ *км/ч*. Эти скорости удовлетворяют системе $\frac{AB}{x}-\frac{AB}{y}=\frac{AB}{y}-\frac{AB}{2x};\ \frac{120}{x}-\frac{120}{y}=1$.

132. 5 *км/ч* и 4 *км/ч* Указание Пусть x *км/ч* — скорость движения первого и y *км/ч* — второго Очевидно, $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{3}{60}$. Так как первый на путь BA затратил на $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{20}\right)$ *час* меньше, чем на AB, а второй, наоборот, больше на $\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{20}\right)$ *час* и так как путь AB они прошли в одно время, то получим второе уравнение $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{20}\right)=\frac{21}{60}$.

133 4,5 *час*. Указание. Пусть v_1 *км/ч* — скорость течения воды, v_2 *км/ч* — собственная скорость лодки, s *км* и x *км* — расстояния AC и BC. Для них имеем систему $\frac{s-x}{v_2+v_1}+\frac{x}{v_2}=3\frac{20}{60};\ \frac{s-x}{v_2-v_1}+\frac{x}{v_2}=4,\ \frac{s}{v_2+v_1}=3$ Отсюда найдем искомое время $t=\frac{s}{v_2-v_1}$.

134. 50 *км/ч*. Указание. Скорость x *км/ч* мотоциклиста и скорость y *км/ч* автомашины связаны уравнениями $\frac{4\cdot 525}{7x}-\frac{3\ 525}{7y}=3,\ \frac{180}{x}+1{,}5-\left(\frac{3\cdot 525}{7x}-\frac{4\cdot 525}{7y}\right)=\frac{345}{y}$. Выражение в скобках есть время (в часах), на которое мотоциклист выехал раньше автомашины в первом случае

135. 20 : 6 : 3. Указание. Должны выполняться соотношения $\left(\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z\right)\cdot\left(\frac{5}{8}x+\frac{1}{3}y\right):\left(\frac{2}{3}y+\frac{3}{5}z\right)=3:5:2$, где x, y, z — количества одинаковых весовых единиц первой, второй и третьей смесей, входящих в новую смесь.

136. 1 *м/сек*. Указание. Положим скорости первого, второго и третьего пловцов равными соответственно x *м/сек*, y *м/сек* и z *м/сек*, а путь AC равным t *м* Тогда получим $\frac{t}{x}=\frac{t}{y}+5=\frac{t}{z}+10,\ \frac{55-9}{y}=\frac{55+9}{z}+5;\ \frac{55-15}{x}=\frac{55+15}{z}+10$.

137. 5 *км/ч*, 15 *км/ч*, 25 *км/ч*. Указание. Если скорости пешехода, велосипедиста и машины соответственно x *км/ч*, y *км/ч* и z *км/ч*, то имеет место система $\frac{3\frac{1}{3}}{x}+\frac{20-3\frac{1}{3}}{z}=\frac{20}{y};\ \frac{20}{x}=\frac{20}{y}+2\frac{40}{60};\ \frac{15}{z}+1\frac{4}{60}=\frac{25}{y}$.

138. В 4 раза Указание Если x, y, z — количества деталей, которые делают в час соответственно первая, вторая и третья бригады, то получим: $x+y+z=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+4z$ и $x+y=2(y+z)$

139. 100, 150 и 2,5 Указание Пусть взято x г первой жидкости, y г второй, а удельный вес смеси z $\frac{Г}{см^3}$. Тогда получим $10\cdot 4z=x$; $60z=y$; $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{x+y}{z}$.

140. В 2,5 раза Указание Для удельных весов x, y, z данных веществ A, B, C имеют место соотношения $(y+z)\ (z+x)\ .\ (x+y)=7:6:3$.

141. 28 руб Портфель дороже авторучки Указание. Если за портфель, авторучку и книгу заплачено x, y, z руб, то должно быть $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{2z}{5}=8$; $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=12$. Умножим первое уравнение на 10, второе на 12 и вновь полученные уравнения сперва сложим почленно, а затем вычтем Это даст $8x+8y+8z=224$, $4x-2y=64$ Отсюда $x+y+z=28$; $x-y=32-x>0$.

142. $\frac{1}{6}$. Указание. Если объем каждого сосуда x л, то $\frac{(x-a)^3}{(x-2a)^3}=\frac{25}{16}$. Отсюда и получим искомое отношение $k=\frac{a}{x}$.

143. 45 *км* Указание Искомое расстояние x *км* и скорость автобуса y *км/ч* удовлетворяют системе $\frac{x}{2y}+\frac{15}{y}=1\frac{15}{60}$; $\frac{x-5}{2y}+\frac{5}{4}+\frac{20}{60}+\frac{15}{y}=1\frac{15}{60}+1\frac{30}{60}$

144. 3 $м^3$, 5$м^3$, 6 $м^3$. Указание Пусть первый насос выкачивает за час x $м^3$ Тогда третий и второй выкачивают за час соответственно $(x+3)$ $м^3$ и $[14-x-(x+3)]$ $м^3$. Если еще предположить, что второй насос всего выкачал y $м^3$, то будем иметь систему $\frac{9}{x}=\frac{28-y}{x+3}$, $\frac{y}{11-2x}=2$

145. 3000 руб. на 8 месяцев и 2000 руб. на 12 месяцев

146. В 10 раз Указание Если x *км/ч* — скорость поезда, kx *км/ч* — скорость самолета и t *час* — время ожидания самолета, то имеет место система $\left(t+\frac{8}{9}\right)x=\frac{8}{9}kx$, $20x=(10-t)kx$.

147. 30 *км* Указание. Пусть искомая скорость есть x *км/ч*, а пункт, в котором вторая машина догнала первую, отстоит от A на y *км*. Тогда будем иметь систему $\frac{y}{x}=\frac{y}{45}+\frac{20}{60}$; $\frac{40-y}{x}=\frac{\frac{1}{2}y}{45}$.

148. 5 *км/ч* Указание Скорости x *км/ч* первого пешехода и y *км/ч* второго связаны уравнениями $\frac{40}{y}=\frac{20}{x}+2\left(\frac{40}{x}-\frac{20}{y}\right)$, $6\frac{2}{3}\left(x+y\right)=60$

149. 60 *км/ч*. Указание. Скорость машины x *км/ч* и скорость пешехода y *км/ч* удовлетворяют системе $2\cdot\frac{46-30}{x+y}+\frac{30}{x}=1$; $\frac{11}{y}-\frac{46-30-11}{x}=2\frac{40}{60}$.

150. $t = 12$ *мин*; 96 *мин*. Указание Пусть машина проходит путь $AB = s$ *км* за x *час* Заметив, что при движении расстояние между соседними автобусами равно $\frac{1}{20}s$ и что 2 *час* 40 *мин* равны $\frac{8}{3}$ *час*, получим систему $\frac{s}{x} \cdot \frac{t}{60} = \frac{3}{8}s \quad \frac{t}{60} + \frac{1}{20}s; \quad \frac{s}{x} \cdot \frac{t-9}{60} + \frac{3}{8}s \cdot \frac{t-9}{60} = \frac{1}{20}s$ или $\frac{t}{3x} - \frac{t}{8} = 1; \quad \frac{t-9}{3x} + \frac{t-9}{8} = 1$

151. $x = \frac{1}{3}[a + 2b + \sqrt{(a-4b)(a-b)}]$ *км* Указание. Скорость x *км/ч* третьего велосипедиста и время t *час*, за которое он догнал первого, удовлетворяют системе $tx = \left(t + \frac{1}{2}\right)a; \quad \left(t + \frac{3}{2}\right)x = \left[\left(t + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]b$ При этом должно быть $x > b > a$.

152. 5 *км/ч*, 10 *км/ч*, $\frac{20}{3}$ *км*. Указание. Скорости x *км/ч* и y *км/ч* движения первой и второй групп и расстояние $z = AC$ удовлетворяют системе $\frac{z}{x} = \frac{20-z}{y}; \quad \frac{15}{y} = 1{,}5; \quad \frac{10}{x} = \frac{10}{y} + 1.$

153. 6, 12, 18 Указание Если первая бригада работала x дней, вторая — y дней и третья — z дней, то будем иметь $\frac{70}{x}y = \frac{280}{y}x;$ $\frac{280}{y}z = \frac{630}{z}y; \quad \frac{70}{x} + \frac{280}{y} + \frac{630}{z} = \frac{980}{14}.$

154. 6 *км/ч*, 4 *км/ч*, 10 *км*. Указание Скорости движения x *км/ч* и y *км/ч* первого и второго туристов и расстояние $z = AB$ найдутся из системы уравнений $\frac{z-4}{x} = \frac{4}{y}; \quad \frac{4 + (z-2)}{x} = \frac{(z-4)+2}{y} = 2.$

155. 100 *км/ч*. Указание. Искомая скорость x *км/ч*, скорость автобуса y *км/ч* и расстояние $z = AB$ удовлетворяют системе $\frac{z}{x} = \frac{12}{60}, \quad \frac{50}{x} = \frac{50-z}{y}; \quad \frac{100}{x} = \frac{100-z}{y+20}.$

156. 300 *км* Указание. Искомое расстояние x *км*, скорости мотоцикла и автомашины y *км/ч* и z *км/ч* и время t *час* от начала движения до момента встречи автомашины с первым мотоциклом удовлетворяют системе уравнений $t(y+z) = x; \quad \frac{\frac{2}{9}x}{z} = \frac{yt - \frac{2}{9}x}{y}; \quad 3(z-20) + 3y = x;$ $\frac{72}{z-20} = \frac{3y-72}{y}.$ Исключив из первых двух уравнений t и x, придем к уравнению $2y^2 - 5yz + 2z^2 = 0$, из которого найдем, что $z = 2y$ и $z = \frac{1}{2}y.$ Второе значение z нужно отбросить, так как по условию $z > y > 0$ Теперь с учетом $z = 2y$ система решается легко

157. 40 *мин* Указание. Пусть искомое время t *час*, скорость лодки в стоячей воде x *км/ч*, скорость течения правой протоки y *км/ч*, скорость течения левой протоки z *км/ч*, длина каждой протоки s *км*. Для этих величин получим систему уравнений $\frac{s}{x+y} - \frac{s}{x+z} = \frac{5}{60}; \quad \frac{s}{x-z} - \frac{s}{x-y} = \frac{30}{60}; \quad \frac{s}{2x-z} - \frac{s}{2x-y} = \frac{4}{60}; \quad t = \frac{s}{x+z},$ причем $z > y$ Выполнив ряд

преобразований и упрощений первых трех уравнений, получим уравнение $6y^2 - 13yz + 6z^2 = 0$, из которого найдем $z = \frac{3}{2}y$ $\left(z = \frac{2}{3}y < y\right.$ и потому должно быть отброшено). После этого система уже решается легко.

158. 16 *час* Указание. Пусть x *км/ч* — скорость течения реки, y *км/ч* — скорость лодки, идущей на веслах в стоячей воде, z *км/ч* — скорость лодки, идущей с включением мотором в стоячей воде, $AB = s$ *км* и t *час* — искомое время Для этих величин справедлива система $\frac{s}{2(x+y)} + \frac{s}{2(x+z)} = 4$; $\frac{s}{x+y} = 5\frac{20}{60}$, $\frac{s}{4(y-x)} + \frac{3s}{4(z-x)} = 7$; $t = \frac{s}{y-x}$, причем $z > y > x$ После ряда преобразований и упрощений первых трех уравнений получим как следствие уравнение $6z^2 - 49yz + 85y^2 = 0$. Из него найдем $z = \frac{5}{2}y$, после чего система решается легко.

159. 50 *км*. Указание Если x *км/ч* — скорость машины, y *км/ч* — скорость пешехода, $PC = z$ *км*, то x, y, z удовлетворяют системе $\frac{20}{y} = \frac{2z+20}{x}$, $\frac{20+z}{y} = \frac{100}{x} + \frac{20}{y} + 6\frac{40}{60}$; $\frac{z+100}{x} = 5$.

160. 540 *м*³. Указание. Искомый объем x *м*³, пропускная способность y *м*³/*мин* второй трубы и время t *мин* работы первой трубы в субботу удовлетворяют системе $18t + y(t+20) = x$; $y(t+20) = 2 \cdot 18t$; $18(t+8) + y(t+8) = x$

161. 4 *км/ч* Указание. Если x *км/ч* — скорость первого пешехода, y *км/ч* — скорость второго, $AB = z$ *км*, то x, y, z удовлетворяют системе $1{,}5z + 2 = 2z - x$; $1{,}5z - 2 = 2z - 2{,}5y$, $\frac{1{,}5z+2}{x} = \frac{1{,}5z-2}{y}$.

162. 62 *м*³. Указание. Пусть объем цистерны x *м*³, в первый час в нее влито y *м*³, а во второй — yz *м*³. Неизвестные x, y, z удовлетворяют системе $y + yz = 48$; $\frac{y(1-z^4)}{1-z} = 2 \cdot \frac{yz(1-z^4)}{1-z}$; $\frac{y(1-z^5)}{1-z} = x$.

163. 480 *км*. Указание. Пусть искомое расстояние x *км*, а скорости пассажирского и товарного поездов y *км/ч* и z *км/ч*. Для них имеем систему уравнений $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} + 4$; $\frac{x}{z}y = \frac{x}{y}z + 280$; $\frac{x}{y+10} = \frac{x}{z+10} - 2\frac{24}{60}$. Перепишем ее так: $\frac{x(y-z)}{yz} = 4$; $\frac{x(y^2-z^2)}{yz} = 280$, $\frac{x(y-z)}{(y+10)(z+10)} - \frac{12}{5} = 0$. Пользуясь первым уравнением, приведем второе и третье к следующему виду: $4(y+z) = 280$, $\frac{4yz}{(y+10)(z+10)} - \frac{12}{5} = 0$. Выполнив в последнем уравнении умножение $(y+10)(z+10)$ и воспользовавшись равенством $y + z = 70$, придем к уравнению относительно yz, и из него найдем, что $yz = 1200$. После этого система решается легко.

164. Не успели Указание. Пусть скорость лодки в стоячей воде x *км/ч*, скорость течения реки y *км/ч* и $AB = z$ *км* Тогда имеем систему уравнений $5y + 5(x-y) = z$; $\frac{z}{x-y} + \frac{z}{x+y} = \frac{z}{y}$ или $z = 5x$; $x^2 - 2xy - y^2 = 0$. Плот находится в пути $\frac{z}{y}$ *час* и это время не должно быть более 12 *час*. Итак, должно быть $\frac{z}{y} = \frac{5x}{y} < 12$ или $x < \frac{12}{5}y$ (*).

Но это невозможно, так как из второго уравнения системы находим $x = y(1+\sqrt{2}) > \frac{12}{5}y$, что противоречит неравенству (*)

165. 10 *час* 29 *мин*. Указание. Пусть в последнем случае автобусы встретятся на t *час* раньше 12 *час*. Если скорости первого и второго автобусов x *км/ч* и y *км/ч* и $AB = z$ *км*, то x, y, z, t удовлетворяют системе уравнений $\frac{z}{x+y} = \frac{z}{2x+y} + \frac{56}{60}$; $\frac{z}{x+y} = \frac{z}{x+2y} + \frac{65}{60}$; $\frac{z}{x+y} = \frac{z}{2x+2y} + t$. Найдя из последнего уравнения $z = 2t(x+y)$ и подставив найденное z в первое и второе уравнения, получим $2t = \frac{2t(x+y)}{2x+y} + \frac{14}{15}$; $2t = \frac{2t(x+y)}{x+2y} + \frac{13}{12}$. Если в последних уравнениях положить $y = kx$, а затем сделать некоторые преобразования, то придем к следующей системе уравнений: $15t - 7k = 14$; $(24t-26)k = 13$. Исключив k, получим $15t(24t-26) = 14(24t-26) + 13 \cdot 7$ или после упрощений $120t^2 - 242t + 91 = 0$. Корни последнего $t_1 = \frac{91}{60}$ и $t_2 = \frac{1}{2}$.

166. $v_2 + \frac{(a-b)(v_2-v_1)}{cv_1\tau}$ *км/ч*. Указание. Пусть скорость поезда x *км/ч*, время движения пассажира на такси y *час*, а время, за которое пассажир догнал поезд, z *час*. Для величин x, y, z имеем систему уравнений $yv_1 + (z-y)v_2 = (t+z)x$; $(z-\tau)v_1 = (t+z-\tau)x$; $yv_1c + a = (z-\tau)v_1c + b$. Исключив из первых двух уравнений величину $(t+z)x$, получим $yv_1 + (z-y)v_2 - (z-\tau)v_1 = \tau x$ или $(z-y)(v_2-v_1) + \tau v_1 = \tau x$. С другой стороны, из третьего уравнения находим $z - y = \frac{a-b}{v_1c} + \tau$.

167. 100 *км*. Указание. Пусть расстояние AB равно $2x$ *км*, а y *км/ч*, z *км/ч* и u *км/ч* — скорости первой лодки, второй лодки и течения реки. Тогда для x, y, z, u получим систему уравнений $\frac{x}{y-u} = \frac{x}{z+u}$; $\frac{x+20}{y+u} = \frac{x-20}{z-u}$; $\frac{2x+150}{y-u} = \frac{150}{z-u}$. Из первого уравнения найдем, что $y - u = z + u$ и $y = z + 2u$. Подставив это значение y во второе и третье уравнения и освободившись в них от знаменателей, получим $(x+20)(z-u) = (x-20)(z+3u)$; $(2x+150)(z-u) = 150(z+u)$. Если теперь положить $z = ku$ и сделать некоторые упрощения, то придем к следующей системе уравнений: $10k - x + 10 = 0$; $xk - x - 150 = 0$. Исключив k, получим $x^2 - 20x - 1500 = 0$ и $x = 50$.

168. $x = 48$.

169. $x = 4{,}5$.

170. $x = 8$. Указание. Если учесть, что $\log_4 x = \frac{1}{2}\log_2 x$ и положить в уравнении $\log_2 x = y$, то уравнение примет вид $\sqrt{1+y} + \sqrt{2y-2} = 4$, причем $y > 1$. Полученное уравнение имеет единственное решение $y = 3$

171. Если $a \neq 1$, то $x = 3$ $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Если $a = 1$, то любое значение $x > 0$, кроме $x = 1$ и $x = 3$. Указание. Воспользуемся формулой $\log_b a \log_a b = 1$ и положим $\log_a x = y$ $(x > 0,\ x \neq 1,\ x \neq 3)$. Тогда придем к уравнению $y^2 - 3y\log_a 3 + (\log_a 3)^2 = 0$

172. $x = 9$ Указание. Положив $\log_3 x = y$, придем к уравнению $\sqrt{(1+4y)(2+y)} = 3y > 0$, которое эквивалентно квадратному уравнению $5y^2 - 9y - 2 = 0$ при условии $y > 0$.

173. $x=8$. Указание. Положим $\log_2 x=y$ Тогда придем к уравнению $2\log_2 y+\log_{\frac{1}{2}}\log_2 2^{\frac{3}{2}}+\log_{\frac{1}{2}} y=1$ или $2\log_2 y-\log_2\frac{3}{2}-\log_2 y=$ $=\log_2 2$, причем $y>0$.

174. $x=32$. Указание. Положим $\log_2 x=y$ Тогда получим $\sqrt{2(2y-7)\left(2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}y\right)}=1+y$, $\sqrt{(2y-7)(7+y)}=1+y>0$ (*) Чтобы левая часть уравнения (*) имела смысл, нужно, чтобы было $y\leqslant -7$ или $y\geqslant\frac{7}{2}$. Но так как $1+y>0$, то должно быть $y\geqslant\frac{7}{2}$. Если теперь возвести в квадрат обе части уравнения (*) и сделать некоторые преобразования, то придем к уравнению $y^2+5y-50=0$, которое при условии $y\geqslant\frac{7}{2}$ имеет только одно решение $y=5$.

175 $x=1$. Указание Положив $2^x=y>0$, придем к уравнению $\lg y+\lg(1+y)=\lg 6$, которое эквивалентно квадратному уравнению $y^2+y-6=0$ при условии $y>0$.

176. $x=0$

177. $x_1=0$, $x_2=3$

178. $x_1=\log_3 10$, $x_2=\log_3 28-3$.

179. $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{15}$. Указание. Прологарифмировав по основанию 5 и положив $\log_5 x=y$, придем к уравнению $y^2+(\log_5 3+\log_5 15)\,y+$ $+\log_5 3\log_5 15=0$

180 $x=0$ Указание. Положив $2^{\frac{x}{3}}=y>0$, придем к уравнению $2y^3-3y^2+1=0$.

181. $x=1$. Указание Положить $y=2^x-\frac{2}{2^x}$.

182 $x_1=\log_3\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $x_2=\log_3(\sqrt{5}+2)$ Указание. Положить $y=3^x-3^{-x}$

183. $x=1\pm\sqrt{1+\log_{2+\sqrt{3}}10}$ Указание. Так как $2-\sqrt{3}=$ $=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, то, положив $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x}=y>0$, получим $(2+\sqrt{3})\,y+$ $+\frac{2+\sqrt{3}}{y}=\frac{101}{10}(2+\sqrt{3})$ или $10y^2-101y+10=0$.

184. Если $a<1$, то $x=\pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$ При иных a уравнение не имеет решения. Указание. Положив $12^{|x|}=y>1$, приведем уравнение к виду $y^2-2y+a=0$.

185. Если $-3<a<0$, то $x=2\pm\log_3(2-\sqrt{4+a})$. При иных a уравнение не имеет решений Указание. Положив $y=3^{-|x-2|}$, данное уравнение приведем к виду $y^2-4y-a=0$. При этом должно быть $0<y<1$.

186. $x_1=625$, $y_1=3$; $x_2=125$, $y_2=4$.

187. $x=\sqrt[3]{2}$, $y=\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$,

188. $x_1=3$, $y_1=4$; $x_2=-\frac{7}{\sqrt{2}}$, $y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

189. $x_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm 1}{2\sqrt{2}}$, $y_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\mp 1}{2\sqrt{2}}$. Указание. Воспользуемся формулой $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$. Тогда первое уравнение имеет вид $\frac{\log_{0,5} y}{\log_{0,5}(xy)}=$ $=\frac{1}{3}\log_{0,5} y$. Так как $\log_{0,5} y\neq 0$, то после упрощений найдем, что $\log_{0,5}(xy)=3$ и $xy=\frac{1}{8}$.

190. $x=\frac{1}{4}(6k+15)$, $y=\frac{1}{4}(2k-15)$; k — любое натуральное число, большее единицы. Указание. Данная система эквивалентна системе $2x-y=3x-4y-15$; $\cos\pi(x+y)=1$, однако при условии, что выражения, стоящие под знаком логарифма, положительны, а основания логарифмов положительны и не равны единице.

191. $x_1=3$, $y_1=1$, $x_2=\frac{3}{7}\sqrt{21}$, $y_2=\frac{1}{3}\sqrt{21}$. Указание. Область допустимых значений определяется соотношениями $x+y>0$, $x-y>0$, $x\neq\pm y$. Так как $xy=3>0$, то $x>0$ и $y>0$; так как $x>y$, то $x>1$, $x+y>1$ и $\log_2(x+y)>0$. Поэтому, если $x-y>1$, то с помощью потенцирования первое уравнение приводится к виду $x^2-y^2=8$, а при $0<x-$ $-y<1$ к виду $x+y=8(x-y)$.

192. $x=y=z=2$. Указание. $(\log_z y)^2=\log_y x\log_x z=\frac{\log_z x\log_x z}{\log_z y}=$ $=\frac{1}{\log_z y}$, $(\log_z y)^3=1$, $\log_z y=1$.

193. $a=0$. Решение. Если при некотором a пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы, то и пара чисел $(-x_0, y_0)$ также есть решение этой системы. Следовательно, если система имеет единственное решение, то оно необходимо должно иметь вид $(0, y_0)$. Но тогда, как это видно из второго уравнения системы, под подозрением могут находиться только две пары чисел $(0, 1)$ и $(0, -1)$. Подставив в первое уравнение $x=0$ и $y=\pm 1$, видим, что задача может иметь решение только тогда, когда $a=0$ или $a=2$. Однако наличие решения вида $(0, y_0)$ при этих a не означает, что система не может иметь еще каких-нибудь решений. Чтобы получить окончательный ответ, подставим эти значения a в первое уравнение. При $a=0$ его можно записать так $y=2^{|x|}+|x|(1-|x|)$ (*). Если (x_0, y_0) — решение системы, то, так как $|x_0|<1$ и $|y_0|<1$ (см. второе уравнение), а из равенства (*) следует $y_0\geqslant 1$, можно сделать вывод, что $y_0=1$. Но при $y_0=1$ возможно только $x_0=0$, т. е. в этом случае система имеет решение и притом единственное. Если же $a=2$, то, как легко проверить, в этом случае система имеет больше одного решения, а именно $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$.

194. $a=0$, $0<b\leqslant 1$. Решение. Если при каких-то a и b решение системы — пара чисел (x_0, y_0), то, так как $x\neq 0$, пара чисел $(x_0, -y_0)$ также будет решением этой системы. Следовательно, если система имеет единственное решение, то оно необходимо должно быть вида $(x_0, 0)$. Но при $y=0$ первое уравнение дает $a=0$, из второго получаем $b>0$, и система имеет решение $(\sqrt{b}, 0)$. Однако на этом решение задачи не заканчивается. Нужно еще выяснить, не будет ли при $a=0$ и некоторых $b>0$ решений (x_0, y_0) системы, где $y_0\neq 0$. Так как мы считаем $a=0$, то система запишется так $x^y=1$; $x^2+y^2=b$. Раз предполагается $y_0\neq 0$, то из первого уравнения следует $x_0=1$, а из второго получаем $y_0=\pm\sqrt{b-1}$ (*). Если $b>1$, то формула (*) дает два вещественных решения, и поэтому $b>1$ быть не может. Если $b<1$, то формула (*) дает для y_0 мнимое значение, это означает, что вещественных решений, отличных от решения $(\sqrt{b}, 0)$, система в

этом случае ие имеет Если $b = 1$, то получим единствеиное решение (1, 0). Итак, $a = 0$, $0 < b \leqslant 1$

195. $a = 1$. Решеиие Если существует такое a, что прн любом b система имеет решеиие, то при этом a, положив в первом уравиении $b = 0$, получим $(x^2 + 1)^a = 1$, так что должно быть $x \neq 0$, $a = 0$ или $x = 0$, a — любое. Если $a = 0$, то система примет вид $(b^2 + 1)^y = 1$, $bxy + x^2y = 1$ (*). Из первого уравнения системы (*) следует, что $y = 0$ (b — любое). Но это невозможно (см второе уравнение). Если $x = 0$ и $a \neq 0$, то из второго уравнения даиной системы получим $a = 1$ (b — любое), и система прнмет вид $x^2 + (b^2 + 1)^y = 1$, $xy(b + x) = 0$ Последняя имеет решеиие (0, 0)

196. $a = -1$. Решеиие Если существует такое a, что при любом b система имеет решение, то при этом a и $b = 0$ также есть решение этой системы. Положив в первом уравнении $b = 0$, получим $a = \pm 1$. При $a = 1$ система примет вид $2^{bx} = 1 - 2by^2$; $y^2 = 1$ Из второго уравиеиия последней системы получим $y = 1$. Подставив $y = 1$ в первое уравнение, видим, что уравнеиие $2^{bx} = 1 - 2b$ не имеет решеиий для любого b, так как должно быть $1 - 2b > 0$. Поэтому случай $a = 1$ иевозможеи Если же $a = -1$, то даиная система станет такой $2^{bx} = 1$, $-2x^2 + y^2 = 1$. Она имеет решение (0, 1) при любом b

197. $x_1 = (2k + 1)\pi$, $x_2 = \frac{2}{5}(2k + 1)\pi$. Указание. Воспользоваться формулой $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

198. $x_1 = \frac{(2k + 1)\pi}{8}$, $x_2 = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ Указание. Воспользоваться формулой $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

199 $x_1 = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{2}{5}k\pi$ Указание. Преобразовать произведение косииусов (синусов) в сумму (разиость) косинусов

200 $x_1 = \frac{(2k + 1)\pi}{2}$, $x_2 = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$. Указаиие Воспользоваться формулами $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$, $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

201. $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. Указаиие Выразить $\cos^4 x$ и $\cos 4x$ через $\cos 2x$

202. $x_1 = \frac{(4k - 1)\pi}{2}$, $x_2 = \frac{(12k + 1)\pi}{30}$ Указание $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

203. $x_1 = k\pi$, $x_2 = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$.

204. $x = 2k\pi + 2\beta \pm \frac{2\pi}{3}$ Указание. Использовать формулы $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$, $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$.

205. $x_1 = \frac{2k + 1}{2}\pi$, $x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4}$, $x_3 = k\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

206 $x_1 = \frac{2k + 1}{24}\pi$, $x_2 = \frac{2k + 1}{2}\pi$.

207. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi + 1$

208. $x_1 = \frac{k\pi}{2}$, $x_2 = \frac{2k + 1}{8}\pi$

209. $x_1 = \frac{k\pi}{2}$, $x_2 = \frac{2k + 1}{20}\pi$. Указаиие Так как $2\sin 4x\sin 6x = \cos 2x - \cos 10x$, то даниое уравнение эквивалентно следующему: $\sin 2x\cos 10x = 0$.

210. $x_1 = \frac{2k+1}{4}\pi$, $x_2 = \frac{k\pi}{7} + (-1)^k \frac{\pi}{42}$

211. $x = \frac{4k+1}{12}\pi$. Указание. Раскрыть скобки и воспользоваться формулами синуса и косинуса тройного угла.

212. $x = \frac{k\pi}{5}$ Указание. Преобразовав произведение косинусов в сумму, придем к уравнению $\cos 3x = \cos 2x$

213. $x_1 = k\pi$, $x_2 = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$. Указание Выразить $\sin 5x$ через $\sin x$

214. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

215. $x = 2k\pi + \arcsin\frac{3}{5}$ Указание Положить $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, $\cos\varphi = \frac{4}{5}$

216. $x_1 = \frac{12k-1}{144}\pi$, $x_2 = \frac{12k+7}{60}\pi$.

217. $x_1 = \frac{k\pi}{3} + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{2k+1}{8}\pi - \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Указание Ввести вспомогательный угол по формулам $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ Тогда уравнение примет вид $\sin(x+\varphi) = \sin 7x$

218. $x_1 = \frac{k\pi}{4} + \frac{\varphi}{8}$, $x_2 = \frac{2k+1}{4}\pi - \frac{\varphi}{4}$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$.

219. $x_1 = k\pi$, $x_2 = k\pi + \frac{\pi}{4}$ Указание. Выразить все члены уравнения через $\sin 2x$ и $\cos 2x$

220. $x = k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{6}-2}{2}$. Указание. См указание к задаче 219

221 $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ Указание Положить $\cos x + \sin x = y$

222. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

223. $x = k\pi + \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\frac{1}{5\sqrt{2}}$.

224. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

225. $x_1 = (2k+1)\pi$, $x_2 = \frac{4k-1}{2}\pi$ Указание. Положив $y = \cos x + \sin x$, придем к кубическому уравнению $y^3 + 3y^2 - 3y - 5 = 0$

226. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ Указание Преобразовав уравнение к виду $\sin x - \sin 3x = 2$, замечаем, что должно быть $\sin x = -\sin 3x = 1$ Но можно поступить и так, как указано в решении задачи 229

227. $x = \frac{4k+1}{2}\pi$ Указание. Рассмотреть два случая $\sin 3x = \cos 10x = 1$ и $\sin 3x = \cos 10x = -1$. Задачу можно решить и способом, указанным в решении задачи 229

228. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$. Указание. Воспользовавшись формулами $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$ и $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$, придем после некоторых преобразований к уравнениям $\cos x - \sin x = 0$ и $\cos 3x - \sin x = 2$. Если последнее уравнение возможно, то только при $\cos 3x = -\sin x = 1$.

229. $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$. Решение Так как $|\sin\alpha| < 1$, то для существования решения данного уравнения необходимо, чтобы было $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$. Отсюда получаем уравнение $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, которое является следствием данного и поэтому содержит все корни данного, но возможно еще и посторонние для него Подставляя в данное уравнение $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, получим $\sin x \sin 3x \sin 5x = \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\pm\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\pm\frac{5\pi}{2}\right) = (\pm 1)(\mp 1)(\pm 1) = \mp 1$ Таким образом, все корни уравнения содержатся в формуле $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$.

230. $x = \frac{k\pi}{7}$, $k \neq 7n$ Указание. Умножить обе части уравнения на $2\sin x$.

231. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ Решение Для любых чисел x, отличных от $n\pi$ и $\frac{2n+1}{2}\pi$, выполняются совместно неравенства $0 < |\sin x| < 1$; $0 < |\cos x| < 1$ Поэтому $|\sin^{25} x + \cos^{27} x| \leqslant |\sin^{25} x| + |\cos^{27} x| = |\sin^{23} x|\sin^2 x + |\cos^{25} x|\cos^2 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, так что среди таких значений x уравнение не имеет решений Остается проверить $x = n\pi$ и $x = \frac{2n+1}{2}\pi$. Сделаем это только для $x = n\pi$ Имеем $\sin^{25} x + \cos^{27} x = \sin^{25} n\pi + \cos^{27} n\pi = 0 + (-1)^{27n}$ Чтобы результат был равен 1, нужно положить $n = 2k$, где k — любое целое число

232. $x_1 = k\pi$, $x_2 = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}$ Решение. Рассматривая данное уравнение как квадратное относительно $\sin x$, получим из условия вещественности его корней, что $\sin^4 3x - \sin^2 3x \geqslant 0$ или $\sin^2 3x(\sin^2 3x - 1) \geqslant 0$. Последнее возможно в двух случаях $\sin^2 3x = 0$ (*) и $\sin^2 3x = 1$ (**) Рассматривая теперь данное уравнение совместно с условием (*), а затем с условием (**), сведем задачу к решению двух систем· $\sin x = 0$; $\sin 3x = 0$ и $\sin^2 x + \frac{1}{4} = \sin x$; $\sin^2 3x = 1$ Первая имеет решение $x_1 = k\pi$, а из второй, после приведения ее к виду $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, $\sin^2 3x = 1$, находим $x_2 = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}$. Задачу можно решить и методом, примененным в решении задачи 276

233. Если $a = 0$, то $x_1 = \frac{2k-1}{2}\pi$ и $x_2 = k\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; если $-1 < a < 0$ или $0 < a < 4$, то $x = k\pi + \operatorname{arctg}\frac{2 \pm \sqrt{(a+1)(4-a)}}{a}$; если $a < -1$ или $a > 4$, то уравнение не имеет решений

234. Если $\frac{1}{8} \leqslant a \leqslant 1$, то $x = \frac{k\pi}{2} \pm \arccos \sqrt{\sqrt{8+8a}-3}$ При иных a уравнение не имеет решений Указание. Так как $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ и $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, то уравнение можно привести к виду $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x + 1 - 8a = 0$ Отсюда $\cos^2 2x = \sqrt{8+8a} - 3$. При этом должно быть $8 + 8a \geqslant 0$ и $0 \leqslant \sqrt{8+8a} - 3 \leqslant 1$.

235. Уравнение не имеет решений Указание. $2\sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{6} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \geqslant 2$

236. Если $a = 1$, то x — любое целое число При иных a уравнение не имеет решений. Указание. Приведя уравнение к виду $\sec^2 \pi(a+x) = 1 - (a-1)^2 \leqslant 1$, найдем, что $\sec^2 \pi(a+x) = 1$.

237. $x_1 = (6n+1)\,15°$, $x_2 = (3n-2)\,60°$ Указание После умножения обеих частей уравнения на $\sin x \cos x$ левая часть примет вид $8\cos^2 x \sin x = 4\cos x \sin 2x = 2\sin 3x + 2\sin x$

238. $x_1 = k\pi - \frac{\pi}{4}$, $x_2 = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ Указание. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

239 $x_1 = \frac{2k+1}{4}\pi$, $x_2 = \frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12}$

240. $x_1 = \frac{k\pi}{2}$, $x_2 = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

241. $x_1 = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$, $x_2 = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

242. $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

243. $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$. Указание. Сгруппировать первый член с третьим, а второй с четвертым.

244. $x_1 = \frac{2k+1}{2}\pi$, $x_2 = k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}$. Указание. Воспользоваться формулой суммы тангенсов

245. Уравнение не имеет решений.

246. $x = \frac{2k+1}{4}\pi$. Указание. Перенести 1 из правой части уравнения в левую, после чего уравнение легко преобразуется к виду $\frac{4\cos 2x}{2\cos 2x - 1} = 2\cos 2x$

247. $x = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{1}{3}$. Указание. В правой части сделать следующее преобразование: $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$. После этого в уравнении освободиться от знаменателей.

248. $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$.

249. $x_1 = k\pi - \frac{\pi}{4}$, $x_2 = k\pi$.

250. $x = k\pi + \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\frac{3-\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$.

251. $x=\frac{2k+1}{16}\pi$. Решение. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=-2\operatorname{ctg}2x$, $2\operatorname{tg}2x-2\operatorname{ctg}2x=-4\operatorname{ctg}4x$, $4\operatorname{tg}4x-4\operatorname{ctg}4x=-8\operatorname{ctg}8x$, $\operatorname{ctg}8x=0$, $8x=\frac{2k+1}{2}\pi$

252 $x=n\pi$ при любом a; $x=m\pi\pm\arccos\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+2a}}}{2}$, если $-\frac{1}{2}<a<4$; $x=k\pi\pm\arccos\frac{\sqrt{1-\sqrt{1+2a}}}{2}$, если $-\frac{1}{2}\leqslant a<0$. Указание Данное уравнение приводится к следующим двум $\sin x=0$ и $8\cos^4x-4\cos^2x-a=0$ Решая последнее, найдем $\cos^2x=\frac{1\pm\sqrt{1+2a}}{4}$. При этом должно быть $1+2a\geqslant 0$ и $0<\frac{1\pm\sqrt{1+2a}}{4}<1$

253. $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ при любом a Кроме того, если $a<-2(\sqrt{2}-1)$ или $a>2(\sqrt{2}+1)$, то $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\pm\arccos\frac{a+2}{a\sqrt{2}}$ Решение. Раскроем скобки в правой части уравнения Получим $a\sin x\cos x=\sin x+\cos x+1$. Положим теперь $\sin x+\cos x=y$ Тогда придем к уравнению $\frac{a}{2}(y^2-1)=y+1$ или $(y+1)(ay-a-2)=0$ Если $y+1=0$, то $\sin x+\cos x+1=0$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{3}{4}\pi$, откуда $x_1=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ и $x_2=(2k+1)\pi$. Значение x_2 не входит в область допустимых значений и поэтому должно быть отброшено Значение x_1 есть решение данного уравнения при любом a Если $ay-a-2=0$, т е $\sin x+\cos x=\frac{a+2}{a}$, то $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a+2}{a\sqrt{2}}$ или $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\pm\arccos\frac{a+2}{a\sqrt{2}}$. Однако последнее возможно лишь при $\left|\frac{a+2}{a\sqrt{2}}\right|<1$ или $-1<\frac{a+2}{a\sqrt{2}}<1$. Эти неравенства легко приводятся к виду, указанному в ответе

254. $x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$ Указание. Умножить уравнение на $\sin x$ и во втором члене левой части уравнения заменить $\sin^2x$ на $1-\cos^2x$.

255. $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$. Указание Умножить обе части уравнения на $\cos x$ и заменить $\cos^2x$ на $1-\sin^2x$

256. $x_1=k\pi-\frac{\pi}{12}$, $x_2=\frac{12k-5}{36}$.

257. Не имеет решений Указание $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-\frac{2\cos x}{\sin x}$.

258. $x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$.

259. $x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{8}$.

260. $x_1 = k\pi$; $x_2 = k\pi \pm \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{7}}$ Указание Привести к виду, удобному для логарифмирования, выражения $\sin x + \sin 5x$ и $\cos x + \cos 5x$, после чего сократить дробь, находящуюся в левой части уравнения. Тогда, положив $y = \operatorname{tg} x$, придем к уравнению $7y^3 - 5y = 0$

261 $x = 4k\pi \pm \frac{2}{3}\pi$. Указание Возвести обе части уравнения в квадрат и, решив новое уравнение, отделить корни, посторонние для данного

262. $x_1 = (2k+1)\pi$, $x_2 = 4k\pi \pm \frac{\pi}{3}$. Указание См указание к задаче 261

263. $x = 2k\pi \pm \arccos(2 - 2\sqrt{2})$ Указание. Воспользоваться формулой преобразования произведения синусов в разность косинусов и после приведения подобных членов возвести уравнение в квадрат. При этом следует учесть, что $\cos x \leqslant 0$

264 $x_1 = k\pi$, $x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ Указание Заметив, что $\operatorname{tg} x \pm \sin x = \operatorname{tg} x(1 \pm \cos x)$, а также, что $\operatorname{tg} x \geqslant 0$, $\cos x > 0$ и, следовательно, $\sin x \geqslant 0$, возведем уравнение в квадрат Тогда придем к уравнению $2\operatorname{tg} x + 2\sqrt{\operatorname{tg}^2 x(1 - \cos^2 x)} = 4\operatorname{tg} x \cos^2 x$ или $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \sin x = 2\operatorname{tg} x \cos^2 x$, которое равносильно данному Последнее же распадается на два $\operatorname{tg} x = 0$ и $1 + \sin x = 2\cos^2 x$

265. $x_1 = k\pi + (-1)^{k-1}\arcsin\frac{1}{4}$, $x_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$. Указание. Преобразовав подкоренное выражение к виду $\left(\frac{4\sin x + 1}{\cos x}\right)^2$, возвести обе части уравнения в квадрат Нужна проверка найденных значений x_1 и x_2

266. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{10}$ Указание Умножив обе части уравнения на $\cos x$, получим в правой части $4\sin x \cos x > 0$ Но это имеет место только для $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ Имея в виду эти промежутки $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, возведем уравнение в квадрат Это приведет к уравнению $2 + 2\sqrt{\sin^2 x} = 16\sin^2 x \cos^2 x$, равносильному данному. Последнее же, если положить $\sin x = y$, примет вид $1 + |y| = 8y^2(1 - y^2)$ (*) Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то уравнение (*) запишется так $8y^4 - 8y^2 + y + 1 = 0$ или $(y+1)(2y-1)(4y^2 - 2y - 1) = 0$ Но $0 < y < 1$ и поэтому используем лишь корни $y = +\frac{1}{2}$ и $y = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54° = \sin\frac{3\pi}{10}$ Если $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$, то уравнение (*) приводится к такому $8y^4 - 8y^2 - y + 1 = 0$ или $(2y+1) \times (y-1)(4y^2 + 2y - 1) = 0$ Здесь учитываем только два корня: $y = -\frac{1}{2}$ и $y = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

267 Уравнение не имеет решений Указание. Так как в левой части $(n-1)$ слагаемое, а $|\sin kx| \leqslant 1$, то должно быть $\sin 2x = \sin 3x = \ldots = \sin nx = 1$ или $\frac{4k_2+1}{4}\pi = \frac{4k_3+1}{6}\pi = \ldots = \frac{4k_n+1}{2n}\pi$ Но это невозможно, потому что уже $\frac{4k_2+1}{4}\pi \neq \frac{4k_3+1}{6}\pi$ Действительно, $12k_2 + 3 \neq 8k_3 + 2$, так как слева число нечетное, а справа — четное

268. Уравнение не имеет решений. Решение. Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, а $\sin 3x - \sin x = 2\sin x\cos 2x = 2\sin x(2\cos^2 x - 1)$, то данное уравнение приводится к следующему, квадратному относительно $\cos x$, уравнению $4\sin x\cos^2 x - 4\sin\cos x + 3 - 2\sin x = 0$. Из условия вещественности корней этого уравнения следует, что должно быть $(2\sin x)^2 - 4\sin x(3 - 2\sin x) \geqslant 0$ или $\sin x(\sin x - 1) \geqslant 0$. Но $\sin x > 0$ и поэтому может быть лишь $\sin x = 0$ или $\sin x = 1$. Однако тогда $x = n\pi$ или $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, а эти значения x не удовлетворяют данному уравнению. Задачу можно решить и методом, примененным к задаче 276.

269. a — любое иррациональное число. Решение. Так как $|\cos x| < 1$, то должны выполняться совместно равенства $\sin^2 ax = 0$ и $\cos x = 1$. Если $a = 0$, то $x = 2k\pi$, что невозможно, так как в этом случае решений бесконечно много. Если $a \neq 0$, то $x_1 = \frac{n\pi}{a}$, $x_2 = 2k\pi$, где n и k — любые целые числа. Но должно быть $x_1 = x_2$, т. е. $\frac{n}{a} = 2k$ (*). При рациональном a равенство (*), а вместе с ним и данное уравнение имеет бесконечно много решений. Если же a — иррациональное число, то равенство (*) справедливо только при $n = k = 0$, а данное уравнение имеет только одно решение: $x = 0$.

270. $x = 2m\pi + \alpha \pm \frac{\pi}{3}$, $y = 2n\pi + \alpha \mp \frac{\pi}{3}$. Указание. Разделив первое уравнение на второе, придем к следующему уравнению: $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \operatorname{tg}\alpha$. Из него найдем $x + y = 2k\pi + 2\alpha$, а подставив это значение $x + y$ во второе уравнение, получим $\cos\frac{x-y}{2} = \frac{(-1)^k}{2}$. Можно показать, что достаточно взять $k = 2p$, где p — любое целое число, чтобы получить все решения данной системы.

271. $x = \frac{1}{2}[(n+k)\pi + (-1)^n \arcsin(a^2+a) + (-1)^k \arcsin(a^2-a)]$, $y = \frac{1}{2}[(n-k)\pi + (-1)^n \arcsin(a^2+a) + (-1)^k \arcsin(a^2-a)]$, где k и n — любые целые числа и $-\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При иных a система не имеет решений. Указание. Сложив уравнения данной системы, а затем вычтя их, придем к следующей системе: $\sin(x+y) = a^2 + a$, $\sin(x-y) = a^2 - a$, эквивалентной данной. Последняя имеет решение в том и только в том случае, когда $-1 \leqslant a^2 + a \leqslant 1$, $-1 \leqslant a^2 - a \leqslant 1$.

272. $x = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$, $y = 2n\pi \pm \arccos(2 - \sqrt{2})$. Указание. $\sin x$ и $\sec y$ найдутся как корни квадратного уравнения $z^2 - 2z + \frac{1}{2} = 0$.

273. $x = \frac{12k+5}{24}\pi$, $y = \frac{12k+1}{24}\pi$. Указание. Первое уравнение системы привести к такому $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{tg} y$.

274. $x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $y_1 = m\pi + \operatorname{arctg} 2$, $z_1 = \frac{3}{4}\pi - (k+m)\pi - \operatorname{arctg} 2$; $x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4}$, $y_2 = m\pi - \operatorname{arctg} 2$, $z_2 = \frac{5}{4}\pi - (k+m)\pi + \operatorname{arctg} 2$. Указание. Воспользовавшись формулой тангенса суммы двух углов и третьим

уравнением, преобразуем два первых уравнения к виду $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} y = 3 \operatorname{tg} y$; $\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} x = 6 \operatorname{tg} x$. Из равенства левых частей заключаем, что $\operatorname{tg} y = 2 \operatorname{tg} x$, и, подставив $\operatorname{tg} y$ в одно из этих уравнений, найдем, что $\operatorname{tg} z = 3 \operatorname{tg} x$. Теперь получим из первого уравнения данной системы, что $\operatorname{tg}^2 x = 1$, $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, а тогда $\operatorname{tg} y = \pm 2$ При этом не произойдет потери корней и не появятся посторонние.

275. $x_{1,2} = \frac{2k+1}{4}\pi \pm \frac{\pi}{12}$, $y_{1,2} = \frac{(4m-2k-1)\pi}{4} \mp \frac{\pi}{12}$, $z_{1,2} = -\frac{2m-1}{2}\pi$, $x_{3,4} = \frac{2k+1}{4}\pi \pm \frac{\pi}{12}$, $y_{3,4} = m\pi$, $z_{3,4} = -\frac{(4m+2k-1)\pi}{4} \mp \frac{\pi}{12}$ Там, где имеются два знака, для первого и третьего решений нужно брать верхние знаки, а для второго и четвертого — нижние Указание Так как $\operatorname{ctg} z = \operatorname{tg}(x+y)$, то, воспользовавшись формулой тангенса суммы двух углов, приведем первое уравнение к виду $(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0$, что дает $x + y = m\pi$ (I), $x = m\pi$ (II), $y = m\pi$ (III). С другой стороны, из второго уравнения найдем $x - y - z = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$. Система $x - y - z = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ (*) с уравнением (I) даст первое и второе решения, а с уравнением (III) — третье и четвертое. Уравнение же (II) противоречит системе (*)

276 $x_1 = 2m\pi + \frac{\pi}{3}$ $y_1 = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$; $x_2 = 2m\pi - \frac{\pi}{3}$, $y_2 = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$. Указание. Данное уравнение эквивалентно следующему: $\left(\cos\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{x-y}{2} = 0$ (см. решение примера 86). Из него получим систему $\sin\frac{x-y}{2} = 0$; $\cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ или $x - y = 2r\pi$, $x + y = 4q\pi \pm 2\arccos\frac{(-1)^r}{2}$ (*). При $r = 2p$ ее решения имеют вид: $x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, где $m = p + q$ и $n = q - p$ Если $r = 2p+1$, то система (*) может быть записана так $x - y = 2(2p+1)\pi$, $x + y = 2(2q \pm 1)\pi \mp \frac{2\pi}{3}$. Ее решения имеют такой же вид, как и решения при $r = 2p$.

277. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $y = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ Решение. Левая часть уравнения $A = \sin^4 x + \frac{1}{\sin^4 x} + \cos^4 x + \frac{1}{\cos^4 x} + 4 = (\sin^4 x + \cos^4 x)\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}\right) + 4 = \left[\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\right]\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) + 4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) + 4$ Так как $\cos^2 2x \geqslant 0$ и $\frac{1}{\sin^4 2x} \geqslant 1$, то $A \geqslant \frac{1}{2}(1+16) + 4$ или $A \geqslant \frac{25}{2}$. Поэтому $12 + \frac{1}{2}\sin y \geqslant \frac{25}{2}$, $\frac{1}{2}\sin y \geqslant \frac{1}{2}$ и $\sin y \geqslant 1$. Так как $\sin y > 1$ быть не может, то $\sin y = 1$, что бу-

дет лишь в том случае, когда $\cos^2 2x = 0$ и $\sin^4 2x = 1$ одновременно Отсюда следует $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$; $y = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$.

278 $x = (n+m)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $y = (n-m)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ Указание. Обозначив левую часть данного равенства буквой A и воспользовавшись соотношением среднего арифметического и среднего геометрического (см. пример 206), получим $A \geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg}^4 x \operatorname{tg}^4 y} + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 2(\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y) \geqslant 2 \cdot 2\sqrt{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y} = 4$ Итак, $3 + \sin^2(x+y) \geqslant 4$, $\sin^2(x+y) \geqslant 1$ и, следовательно, $\sin^2(x+y) = 1$ и $x + y = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (*) Найдя y из равенства (*) и подставив его в данное уравнение, получим $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x - 2 = 0$. Отсюда найдем, что $\operatorname{tg}^2 x = 1$ $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = 1$, $\cos 2x = 0$, $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. А тогда из равенства (*) определим и $y = \left(n - \frac{k}{2}\right)\pi + \frac{\pi}{4}$. Формулы для x и y примут более симметричную форму, если положить $k = n + m$.

279. $a = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $b = 1$ Решение Заменим в уравнении y на $a - x$. Получим $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(a-x) + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(a-x) = b$ (*). Теперь данную задачу можно сформулировать так найти все значения a и b, при которых равенство (*) есть тождество относительно x Положим $x = 0$ в равенстве (*). Тогда получим $b = \operatorname{tg} a$. Положим в нем $x = \frac{\pi}{4}$. Это даст $1 + 2\operatorname{tg}\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = b$ или $2\frac{\operatorname{tg} a - 1}{\operatorname{tg} a + 1} = b - 1$. Подставляя в последнее равенство b вместо $\operatorname{tg} a$, найдем, что $\frac{2(b-1)}{b+1} = b - 1$, $2b - 2 = b^2 - 1$, $(b-1)^2 = 0$, $b = 1$ А тогда $\operatorname{tg} a = 1$ и $a = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

280. $x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}$. Указание. Положив $\log_2 \sin x = y < 0$, приведем данное уравнение к виду $3y^2 + 2y - 1 = 0$

281. Если $|a| > \sqrt{2}$, то $x = k\pi + (-1)^k \cdot \arcsin 10^{a-b}$, где $b = \sqrt{2(a^2-1)}$. Если $-\sqrt{2} < a < -1$, то $x = k\pi + (-1)^k \arcsin 10^{a \pm b}$ При иных a уравнение не имеет решений. Указание. Положим $\lg \sin x = y < 0$ Тогда придем к уравнению $y^2 - 2ay + 2 - a^2 = 0$ (*) Чтобы корни его были вещественными, должно быть $a^2 - (2 - a^2) \geqslant 0$ или $|a| \geqslant 1$. Если $a \geqslant 1$ и $2 - a^2 > 0$, то задача не имеет решения, так как корни уравнения (*) будут положительными Если $|a| > 1$ и $2 - a^2 < 0$, т. е. $|a| > \sqrt{2}$, то один корень уравнения (*) будет неположительным, а именно $y = a - \sqrt{2(a^2-1)}$. Если, наконец, $a < -1$ и $2 - a^2 \geqslant 0$, то оба корня будут неположительными и задача будет иметь два решения.

282. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ Указание. Возвести обе части уравнения в куб. В дальнейшем учесть, что область допустимых значений определяется неравенствами $\sin x > 0$, $\cos x > 0$.

283. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$

284. $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$.

285. $x_k = 2m\pi + \frac{k\pi}{8}$, где m — любое целое число, а $k = 1, 3, 5, 7$. Указание. Уравнение приводится к виду $\sin 2x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Из этого уравнения получим $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$. Далее, положив $k = 4m$; $4m + 1$, $4m + 2$; $4m + 3$, нужно учесть, что $\sin x > 0$.

286. $x = k\pi + (-1)^k \arcsin 2^{-\sqrt{0{,}5 \log_2 3}}$. Указание. $\log_{\sin^2 x} 3 = \frac{\log_2 3}{2 \log_2 \sin x}$. Следует учесть, что $2^{\sqrt{0{,}5 \log_2 3}} > 1$.

287. $x_1 = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $x_2 = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

288 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

289. $x = \frac{(2k+1)\pi}{4}$. Указание. Данное уравнение эквивалентно уравнению $y^2 + y - 2 = 0$, где $y = 2^{\cos 2x} > 0$.

290. $x_1 = k\pi$, $x_2 = n\pi + (-1)^{n-1} \frac{\pi}{6}$. Указание Данное уравнение приводится к уравнению $2y^2 - 3y + 1 = 0$, если положить $4^{\sin x} = y > 0$

291. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$. Указание. Положив $2^{\operatorname{tg} x} = y > 0$, придем к уравнению $y^2 + y - 6 = 0$.

292. Если $-\frac{2}{\sqrt{3}} < a < -\frac{\sqrt{13}+1}{4}$, то $x = k\pi + (-1)^k \arcsin \log_2 \frac{\pm\sqrt{4 - 3a^2} - a}{2}$. Если $-\frac{\sqrt{13}+1}{4} < a < \frac{\sqrt{13}-1}{4}$, то $x = k\pi + (-1)^k \arcsin \log_2 \frac{\sqrt{4 - 3a^2} - a}{2}$. При иных a уравнение не имеет решений. Указание. Положив $2^{\sin x} = y > 0$, придем к уравнению $y^2 + ay + a^2 - 1 = 0$. Чтобы найти область допустимых значений, нужно рассмотреть систему неравенств $4 - 3a^2 \geqslant 0$, $\frac{\pm\sqrt{4 - 3a^2} - a}{2} > 0$, $\left| \log_2 \frac{\pm\sqrt{4 - 3a^2} - a}{2} \right| < 1$

293 $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$

294. Решение. Пусть $a < b$. Тогда $(a+b)^n < (2b)^n < 2^n b^n + 2^n a^n = 2^n (a^n + b^n)$

295. Указание. Так как $m + n + p \geqslant 3\sqrt[3]{mnp}$, то левая часть $A \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$, а $\sqrt[3]{abc} < \frac{a+b+c}{3}$. Отсюда и следует доказываемое неравенство

296. Указание. Обозначив правую часть неравенства буквой A, рассмотреть $A^2 = [a^2 - (b-c)^2][b^2 - (c-a)^2][c^2 - (a-b)^2]$.

297. Решение. $\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta) = \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}\right)^2 = \frac{(n-1)^2 \operatorname{tg}^2\beta}{(1 + n \operatorname{tg}^2\beta)^2} =$

$= \frac{(n-1)^2 \operatorname{tg}^2\beta}{(1 - n \operatorname{tg}^2\beta)^2 + 4n \operatorname{tg}^2\beta} < \frac{(n-1)^2 \operatorname{tg}^2\beta}{4n \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{(n-1)^2}{4n}$

298. Указание. Выразив все члены неравенства через $\sin\alpha$, получим $(1-\sin\alpha)(4\sin\alpha+1)^2\geqslant 0$.

299. $-2<k<3$.

300. $0<k<1$ Указание Положим $1+\log_2\frac{k}{k+1}=m$ Тогда неравенство примет вид $(3-m)x^2+2mx-2m>0$ Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, $d=m^2+2m(3-m)=-m(m-6)$ Искомые значения k найдутся, если решить систему $3-m>0$, $-m(m-6)<0$. Она распадается на две. $m<3$, $m<0$ и $m<3$, $m>6$ Первая дает $m<0$, а вторая противоречива Итак, $1+\log_2\frac{k}{k+1}<0$, $\log_2\frac{k}{k+1}<-1$, $0<\frac{k}{k+1}<\frac{1}{2}$, $0<k<1$.

301. $a>1$. Решение. Если $x>0$, то x может быть как угодно большим, т е является неограниченной величиной Пусть трехчлен, находящийся в левой части неравенства, имеет вещественные корни x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$ Если $a<0$, то для того, чтобы трехчлен имел положительное значение, должно быть $x_1<x<x_2$, что невозможно, так как это означало бы ограниченность x Если же $a>0$, то должно быть $x<x_1$ или $x>x_2$ Первое ввиду неограниченности x отпадает, а второе требует, чтобы было $x_2=0$. Последнее же возможно лишь при равенстве нулю свободного трехчлена, т е при $3a+1=0$ или $a=-\frac{1}{3}$, что противоречит неравенству $a>0$. Остается считать корни трехчлена мнимыми. Но в этом случае трехчлен может быть положительным только при выполнении условий $a>0$ и $4-a(3a+1)<0$, что и даст $a>1$ При $a>1$ трехчлен больше нуля не только для $x>0$, но и для всех вещественных x Остается рассмотреть случай $a=0$.

302. $-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{3}-4$ Решение. Данный трехчлен будет отрицательным в том случае, если он имеет вещественные корни x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ и $x_1<x<x_2$ Следовательно, должны совместно выполняться неравенства $a^2-4(a^2+6a)>0$, $x_1\leqslant 1$, $2\leqslant x_2$ Первое после преобразований примет вид $a(a+8)<0$ и справедливо при $-8<a<0$ (*). Переходя ко второму, заметим, что поскольку число 1 находится между x_1 и x_2, т е. $x_1\leqslant 1<x_2$, а для этого необходимо и достаточно, чтобы значение $x=1$ удовлетворяло данному неравенству, то получим $a^2+7a+1\leqslant 0$ (знак равенства поставлен потому, что возможно $x_1=1$) Решая последнее неравенство, найдем, что $-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}$ (**) Подставляя теперь в данное неравенство $x=2$, получим соотношение $a^2+8a+4\leqslant 0$, справедливое при $-4-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant -4+2\sqrt{3}$ Сопоставляя этот результат с результатами (*) и (**), придем к приведенному выше ответу

303. $-3\leqslant a\leqslant 3$ Указание Положим $x=\frac{1}{y}$ Тогда задача приводится к такой найти все значения a, при которых из неравенства $y\geqslant 1$ следует неравенство $2y^2+(a+5)y-(a^2+a-2)\geqslant 0$ Разложив левую часть этого неравенства на множители, записываем $(2y+1-a)(y+2+a)\geqslant 0$ (*) Если неравенство (*) справедливо при $y=1$, то оно будет справедливо и при $y>1$ Положим в неравенстве (*) $y=1$. Тогда получим $9-a^2\geqslant 0$ и $|a|\leqslant 3$.

304. $|a|>2\sqrt{2}$, $0<|a|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ Указание. Заметив, что $a\neq 0$, положим $2\log_{0,5}a^2=m$. Тогда данное неравенство примет вид $x^2-mx+3-m<0$ (*) Если дискриминант квадратного трехчлена, находящегося в ле-

вой части неравенства (*), неположительный, то это неравенство не имеет решений Если же он положительный, то решения будут Таким образом, вопрос сводится к решению неравенства $m^2-4(3-m)>0$ или $m^2+4m-12>0$. Из него найдем $m<-6$ и $m>2$; $2\log_{0,5}a^2<-6$ и $2\log_{0,5}a^2>2$

305. Если $a>1$, то x — любое число Если $a=1$, то x — любое число, кроме -1 Если $a<1$, то $x<-1-\sqrt{1-a}$ и $x>-1+\sqrt{1-a}$ Указание Записать неравенство так $(x+1)^2+a-1>0$

306 Если $-2<a<2$, то x — любое число Если $a=-2$ (или $a=2$), то x — любое число, кроме 1 (соответственно кроме -1) Если $|a|>2$, то $x<\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ и $x>\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ Указание Записать неравенство так $\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+1-\dfrac{a^2}{4}=0$

307. Если $a<0$, то $x_1<x<x_2$, где $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}$ и $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}$. Если $a=0$, то $x>-1$ Если $0<a<\dfrac{1}{4}$, то $x<x_1$ и $x>x_2$ Если $a=\dfrac{1}{4}$, то x — любое число, кроме -2 Если $a>\dfrac{1}{4}$, то x — любое число Указание Воспользоваться свойствами квадратного трехчлена

308 $2<x<5$ Указание Воспользоваться примером 200

309. $x<-2$; $\dfrac{1}{4}<x<1$; $x\geqslant 4$.

310. $x<-3$; $x>1$

311. $x<1$, $\dfrac{3}{2}<x<2$; $x>3$

312 $-\dfrac{1}{2}<x<1$ Указание $4x^2(x+1)^2+4x^2-5(x+1)^2<0$, $(x+1)^2(4x^2-1)-4[(x+1)^2-x^2]<0$, $(2x+1)[(x+1)^2(2x-1)-4]<0$, $(2x+1)(2x^3+3x^2-5)<0$, $(2x+1)(x-1)(2x^2+5x+5)<0$, $(2x+1)(x-1)<0$.

313 $0<x<1$, $x>2$ Неравенство равносильно такому $\dfrac{x-1}{x^2-4}>0$

314 $x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

315 Если $a=0$, то решений нет Если $a\neq 0$, то $-\dfrac{|a|}{\sqrt{5}}<x<|a|$. Указание Область допустимых значений определяется неравенством $|x|<|a|$ или $-|a|<x<|a|$ Если $0<x<|a|\neq 0$, то неравенство справедливо Если $-|a|<x<0$, то, возведя в квадрат неравенство $\sqrt{a^2-x^2}>-2x$, найдем, что $5x^2<a^2$ В случае $a=0$ из неравенства $a^2-x^2>0$ следует, что $x=0$ Но $x=0$ не является решением данного неравенства.

316. $-\sqrt[4]{2}<x<0$; $1<x<\sqrt[4]{2}$.

317 $1<x<\dfrac{5}{4}$; $x>\dfrac{5}{3}$ Решение Область допустимых значений определяется из соотношения $|x|>1$, а так как из данного неравенства видно, что $x>0$, то считаем $x>1$ В этом случае обе части неравенства положительны и, возведя их в квадрат, получим $x^2+\dfrac{x^2}{x^2-1}+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}>\left(\dfrac{35}{12}\right)^2\cdot\dfrac{x^4}{x^2-1}+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}>\left(\dfrac{35}{12}\right)^2$. Положив $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=y>0$, придем к неравенству

$y^2+2y-\left(\frac{35}{12}\right)^2>0$, равносильному данному. Оно справедливо при $y>-1+$ $+\sqrt{1+\left(\frac{35}{12}\right)^2}=-1+\sqrt{\left(\frac{37}{12}\right)^2}=\frac{25}{12}$. Таким образом, задача свелась к решению неравенства $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}>\frac{25}{12}$. Последнее же после возведения в квадрат и некоторых преобразований приведется к такому: x^4-a^2x+ $+a^2>0$ (*), где $a=\frac{25}{12}$. Найдем корни полученного биквадратного уравнения. Получим $x^2=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4a^2}}{2}=\frac{a}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4})=\frac{25}{2\cdot 12}\times$ $\times\frac{25\pm\sqrt{25^2-24^2}}{12}=\frac{25}{2\ 12^2}(25\pm 7)$, $x_1^2=\frac{25}{16}$, $x_2^2=\frac{25}{9}$. Следовательно, неравенство (*) имеет место при $x^2<x_1^2$ и $x^2>x_2^2$, а данное — при $x<|x_1|$ и $x>|x_2|$ с учетом ранее найденного $x>1$. Отсюда и получаем приведенные выше ответы.

318. $0<x<1$, $x>9$. Указание. Так как здесь $x\geqslant 0$, то обе части неравенства $\sqrt{x}>1-\sqrt[3]{1-x}$ положительны и возведение его в квадрат приведет к неравенству $x>(1-\sqrt[3]{1-x})^2$, эквивалентному данному. Положив в последнем $\sqrt[3]{1-x}=y$, получим $1-y^3>(1-y)^2$, $y^3+y^2-2y<0$, откуда $y<-2$, $0<y<1$.

319. $x<\log_3 2$.

320. $x<\log_2 3$.

321. $x<0$; $x>1$.

322. $x<\log_2 3$.

323. $x>\frac{\lg(\sqrt{5}+1)-\lg 2}{\lg(\sqrt{5}+1)-\lg 4}$. Указание. Положив $\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^x=y\geqslant 0$, придем к неравенству $y^2-y-1<0$. Следует иметь в виду, что $\cos\frac{\pi}{5}=$ $=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

324. $x<-2$; $x>2-\log_2 3$. Указание. Положив $2^x=y>0$, сведем данное неравенство к неравенству $\frac{1}{y+3}>\frac{1}{4y-1}$, а затем к неравенству $(y+3)(4y-1)(3y-4)>0$.

325. $x>1$.

326. $x<-1$, $0<x<2$.

327. $\frac{1}{2}\log_5 6<x<\log_6 5$. Указание. Сгруппировать первые члены обеих частей неравенства, а затем вторые. При этом неравенство $\frac{1}{2}\log_5 6<$ $<\log_6 5$ нужно доказать.

328. $0<x<4$. Указание. Очевидно, $x>0$. Если все члены данного неравенства разделить на $4^{1+\sqrt{x}}$ и затем положить $y=2^{x-\sqrt{x}}>0$, то придем к эквивалентному неравенству $\frac{1}{4}y^2<\frac{3}{4}y+1$, которое имеет решение $0<y<4$. Но тогда $2^{x-\sqrt{x}}<4$ и $x-\sqrt{x}<2$. Решив последнее (положив для этого $\sqrt{x}=z\geqslant 0$), придем к ответу, приведенному выше.

329. $0<x<\log_3^2 2$; $x>1{,}5$.

330. $x < -1$; $x > \log_3 2$.

331. $x > 0$.

332. $x > 0$. Указание Разделить все члены неравенства на 27^x.

333. $-\frac{3}{2} < x < -1$

334. $-1 < x < 1$; $3 < x < 5$ Указание. Должно быть $0 < x^2 - 4x + 3 < 8$

335 $-1 \leqslant x < 0$; $3 < x \leqslant 4$.

336. $x < 2$; $x > 3$

337. $-4 < x < -3$; $0 < x < 1$.

338. $2 < x < 3$; $x > 3$.

339 $\frac{\sqrt{61} - 9}{2} < x < 2$. Указание Выполнить потенцирование и учесть, что область допустимых значений определится из неравенств $x + 1 > 0$; $4 - x^2 > 0$, что дает $-1 < x < 2$.

340. $2 < x < 4$.

341. $-0{,}5 < y < 1$

342. $0 < x < 1$; $x \geqslant 2$ Указание. Должно быть $x > 0$, $x \neq 1$. При решении рассмотреть два случая: $x > 1$ и $0 < x < 1$.

343. $0 < x < \frac{1}{2}$

344 $x > 3$.

345. $2 \leqslant x < \frac{11}{4}$, $x \geqslant 4$

346 $x \leqslant -\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$ Указание. Здесь область допустимых значений — все вещественные числа Выполнив потенцирование и освободившись от знаменателя, придем к эквивалентному неравенству $|x^2 - 4x| + 3 \geqslant x^2 + |x - 5|$ Рассмотрев последовательно промежутки $(-\infty, 0]$, $(0, 4]$, $(4,5]$, $(5, +\infty)$, убедимся, что в первом и втором промежутках есть решение данного неравенства, а именно $x \leqslant -\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$, а в третьем и четвертом их нет.

347. $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 3) \leqslant x < 1$ Решение. Область допустимых значений определится из совместного рассмотрения соотношений $x + 3 \geqslant 0$, $\sqrt{x+3} - x - 1 > 0$ Из них найдем, что $x \geqslant -3$, $\sqrt{x+3} > x + 1$. Если $x + 1 \leqslant 0$, то второе неравенство будет удовлетворено и вместе с неравенством $x \geqslant -3$ получим $-3 \leqslant x \leqslant -1$. Если же $x + 1 > 0$, то, возведя второе неравенство в квадрат, придем к неравенству $x^2 + x - 2 < 0$, у которого решения x удовлетворяют соотношению $-2 < x < 1$ Сопоставляя с ранее полученным $-3 \leqslant x \leqslant -1$, видим, что область допустимых значений определяется неравенствами $-3 \leqslant x < 1$. Далее, производя потенцирование, получим $\sqrt{x+3} - x - 1 < 1$, $\sqrt{x+3} < x + 2$ (*), $x + 3 < x^2 + 4x + 4$, $x^2 + 3x + 1 > 0$ Решая последнее неравенство, найдем $x < -\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ и $x > \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$. Однако возведение в квадрат неравенства (*) предполагало, что $x + 2 \geqslant 0$, т е. $x \geqslant -2$, так что остается только $x > \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$. Теперь, чтобы получить окончательно ответ, нужно вспомнить ранее найденное $-3 \leqslant x < 1$.

348. $1 < x < 4$; $x > 262\,144$.

349. $-1 < x < 0$; $0 < x < 1$.

350. $x < -2$. Указание. Положив $\log_3 \frac{x-1}{x+1} = y > 0$, получим $\log_2 y < -\log_2 y$, $2\log_2 y < 0$, $0 < y < 1$, $0 < \log_3 \frac{x-1}{x+1} < 1$, $1 < \frac{x-1}{x+1} < 3$.

351. $x > \frac{12}{5}$. Указание. Здесь $x > 0$. Положив $\log_5 (\sqrt{x^2+1}+x) = y > 0$, получим $-\log_3 y < \log_3 y$, $2\log_3 y > 0$, $\log_3 y > 0$, $y > 1$; $\log_5 (\sqrt{x^2+1}+x) > 1$, $\sqrt{x^2+1}+x > 5$.

352. $0 < x < 1{,}5$.

353. $-2-\sqrt{3} < x < -2-\sqrt{3+\log_2(\sqrt{3}-1)}$; $-2+\sqrt{3+\log_2(\sqrt{3}-1)} < x < -2+\sqrt{3}$. Указание. Положим $2^{x^2+4x} = y > 0$. Тогда, потенцируя и учитывая область допустимых значений, придем к неравенству $0 < y^2 + y - \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$.

354. $x > 1000$. Указание. Прологарифмировав данное неравенство и положив $\lg x = y$, придем сперва к неравенству $(y^2 - 3y + 1)\, y > 3$, а затем к неравенству $y - 3 > 0$.

355. $x > 3$; $0 < x < \frac{1}{3}$.

356. $0 < x < 0{,}5$.

357. $4 < x < 262144$.

358. $0 < x < 1$; $\sqrt{3} < x < 9$.

359. $2^{-\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2}$; $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$. Указание. Здесь $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$. Воспользовавшись формулой $\log_b a \log_a b = 1$ и положив $\log_2 x = y$, придем к неравенству $\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1+y}(2+y) > 1$, а затем к неравенству $y(y+1)(y^2-2) < 0$.

360. $-2 < x < -1$; $-1 < x < 0$; $0 < x < 1$; $x > 2$. Указание. Рассмотреть два случая $|x| < 1$, $|x| > 1$.

361. $-\frac{3}{2} < x < 3$, но при этом $x \neq 0$ и $x \neq -1$. Указание. Рассмотреть два случая: $x > -1$ и $x < -1$.

362. $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}$; $1 < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Указание. Область допустимых значений определяется неравенствами $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > 1$. Если $0 < x < \frac{1}{2}$, то $\frac{2x-1}{x-1} < x$. Если $x > 1$, то $\frac{2x-1}{x-1} > x$.

363. $\frac{1}{2} < x < 1$. Указание. Область допустимых значений определится из совместного рассмотрения соотношений $x > 0$, $x \neq 1$, $\frac{4x+5}{6-5x} > 0$. Из них найдем, что $0 < x < 1$ и $1 < x < \frac{6}{5}$. Если $0 < x < 1$, то $\frac{4x+5}{6-5x} > \frac{1}{x}$. Если $x > 1$, то $\frac{4x+5}{6-5x} < \frac{1}{x}$.

364. $0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $x > 2$. Указание. Положив $\log_x 2 = y$, придем к неравенству $y + 1 < \sqrt{y+3}$ (*), в котором предполагается $y > -3$.

Если $y < -1$, то неравенство (*) справедливо и мы получаем одну группу решений $-3 < y < -1$. Если $y + 1 > 0$, то, возведя обе части неравенства (*) в квадрат, найдем другую группу решений $-1 < y < 1$. Объединив эти две группы, получим $-3 < y < 1$ и, следовательно, $-3 < \log_x 2 < 1$. При отыскании x из последних неравенств нужно рассмотреть отдельно случаи $0 < x < 1$ и $x > 1$.

365. $x > 3$. Указание. Здесь должно быть $x > 1$. Воспользуемся формулой $\log_b a \log_a b = 1$ и положим в данном неравенстве $\log_2 \frac{x-1}{x+1} = y < 0$. Получим $y - \frac{1}{y} > 0$ или $y^2 - 1 < 0$. Отсюда найдем, что $-1 < y < 0$ и $-1 < \log_2 \frac{x-1}{x+1} < 0$.

366. $1 < x < 1{,}5$; $2 < x < 2{,}5$; $x > 3$. Указание. Область допустимых значений определится из совместного рассмотрения неравенств $x > 0$, $0 < 2x^2 - 7x + 6 \neq 1$. Они дают $0 < x < \frac{3}{2}$, $x > 2$, но при этом $x \neq 1$ и $x \neq 2{,}5$. Имея в виду именно эти значения x, сведем задачу к следующим двум: 1) $2x^2 - 7x + 6 < 1$, $\frac{x}{3} < 1$ и 2) $2x^2 - 7x + 6 > 1$, $\frac{x}{3} > 1$.

367. $\log_4 7 < x < \log_2 3$. Указание. Из совместного рассмотрения соотношений $x > 0$, $x \neq 1$, $4^x - 6 > 1$ найдем, что область допустимых значений определяется неравенством $x > \log_4 7 > 1$. Учитывая, что $x > 1$, получим $\log_2 (4^x - 6) < x$, $4^x - 6 < 2^x$ и, положив $2^x = y > 0$, придем к неравенству $y^2 - y - 6 < 0$.

368. $\sqrt{6} - 1 < x < 2$; $2 < x < 5$. Указание. Из совместного рассмотрения соотношений $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$, $\frac{4x-5}{|x-2|} > 0$ находим, что должно быть $x > \frac{5}{4} > 1$, $x \neq 2$. Так как $x > 1$, то данное неравенство эквивалентно такому: $\frac{4x-5}{|x-2|} > x$. Если $\frac{5}{4} < x < 2$, то оно приводится к виду $x^2 + 2x - 5 > 0$, если же $x > 2$, то примет форму $x^2 - 6x + 5 < 0$.

369. $x < -1$. Указание. Прологарифмировать обе части неравенства и рассмотреть случаи $x < 0$ и $x > 0$.

370. $1 < x < 2$. Указание. Прологарифмировав обе части неравенства, получим $(x + 1)(x - 2) \lg |x| < 0$.

371. $k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{4}$.

372. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$. Указание. Привести неравенство к виду $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

373. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$; $2k\pi - \frac{5}{6}\pi < x < 2k\pi - \frac{\pi}{6}$. Указание. Положим $\sin x = y$. Тогда данное неравенство примет вид $5 + 2(1 - 2y^2) < 3|2y - 1|$ или $7 - 4y^2 < 3|2y - 1|$ (*). Если $2y - 1 \geqslant 0$, т. е. $\frac{1}{2} < y \leqslant 1$, то неравенство (*) станет таким: $2y^2 + 3y - 5 > 0$. Из него найдем, что $y = 1$. Если $2y - 1 < 0$, т. е. $-1 < y < \frac{1}{2}$, то неравенство (*) приведется к виду $2y^2 - 3y - 2 > 0$ и из него получим $-1 < y < -\frac{1}{2}$.

374. $\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{7}{4}\pi+2k\pi$ Указание Положив $\cos x=y$, придем к неравенству $2y^2-(2+\sqrt{2})y+\sqrt{2}>0$

375. $\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi$. Указание. Положив $\operatorname{tg}x=y$, придем к неравенству $y^2-(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}\leqslant 0$.

376. $\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+k\pi$ Указание. С помощью замены $y=\cos 2x$ данное неравенство приведем к такому $2y^2+13y-7<0$.

377. $2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{6}$, $2k\pi+\frac{5}{6}\pi<x<(2k+1)\pi$.

378. $-\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$. Указание. Если $\operatorname{tg}\alpha\geqslant 1$, то $\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}+k\pi$ (*) В данном случае $\alpha=\frac{1}{1+x^2}$ и потому $0<\alpha\leqslant 1$, так что из соотношений (*) находим $\alpha\geqslant\frac{\pi}{4}$ и $1+x^2\leqslant\frac{4}{\pi}$.

379. $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<-\operatorname{arctg}2+k\pi$, $-\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi$. Указание. Положив $\operatorname{tg}x=y$, придем к неравенству $\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}>t$ или $t^3+2t^2-t-2<0$

380. $k\pi-\frac{\pi}{4}<x<0$; $0<x<k\pi+\frac{\pi}{4}$. Решение. Положим $\operatorname{tg}^2x=y\geqslant 0$ Тогда получим $y^2<|y-2|$. Если $y>2$, то $y^2-y+2<0$, $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}<0$, что невозможно Если же $0\leqslant y<2$, то $y^2+y-2<0$, $(y+2)(y-1)<0$ и $0\leqslant y<1$ Следовательно, $\operatorname{tg}^2x<1$, $|\operatorname{tg}x|<1$, $k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4}$, причем $x\neq 0$, так как $x=0$ находится вне области допустимых значений.

381. $0<x<\frac{\pi}{2}$; $\pi-\operatorname{arctg}2<x<\pi$. Указание Положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=y>0$. Тогда $\sin x=\frac{2y}{1+y^2}$, $\cos x=\frac{1-y^2}{1+y^2}$ После некоторых преобразований придем к неравенству $\frac{y^3-1}{y^2-y-1}>0$, равносильному данному. Последнее после деления на величину $y^2+y+1>0$ запишется так $(y-1)(y^2-y-1)>0$ Чтобы получить ответ в приведенной выше форме, следует учесть, что $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\pi-\operatorname{arctg}2$.

382. $2k\pi+\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$ Указание. Так как обе части неравенства положительны, а область допустимых значений для x — все вещественные числа то, возведя неравенства в квадрат, получим неравенство $2-\sqrt{3}\cos x+\sin x>1$, равносильное данному.

383. $2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$ Указание Должно быть $\sin x>0$ и $\cos x>0$. При всех этих x имеем $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>\sin^2x+\cos^2x=1$

384 $-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{3}{4}+2k\pi<x<-\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{3}{4}+(2k+1)\pi$.

Указание Если положить $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cdot y$, то после возведения данного неравенства в квадрат и некоторых упрощений получим $\frac{3y-1}{2-y}>1$, $4y-3>0$ и $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{3}{4}$.

385. $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{5}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi<x<\pi$, $\frac{5}{3}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$ Указание. Так как $|\cos x+\sqrt{3}\sin x|=2\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|=2|\cos\alpha|$, то данное неравенство запишется так $\log_{2|\cos\alpha|}2<0$ Оно эквивалентно неравенству $2|\cos\alpha|<1$ при условии $\cos\alpha\neq0$ Отсюда следует, что $-\frac{1}{2}<\cos\alpha<\frac{1}{2}$ Последнее же возможно только тогда, когда α принадлежит одному из следующих промежутков $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\pi\right)$, $\left(\frac{4}{3}\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi,\frac{5}{3}\pi\right)$

386. $0<x<\frac{\pi}{24}$; $\frac{5\pi}{24}<x<\frac{\pi}{4}$

387. $\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $\frac{3}{4}\pi+2k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+2k\pi$. Указание. Положив $\sin x=y$, придем после потенцирования к неравенству $2y^2(3-4y^2)>1$, равносильному данному, при условии $0<y<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

388. $2k\pi+\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{6}$. Указание Область допустимых значений определится из соотношений $\sin x>0$, $\sin x\neq1$. Положим $\log_2\sin x=y<0$. Получим $\frac{1}{y^2}<\frac{2}{y}+3$, $3y^2+2y-1<0$, $(3y-1)(y+1)<0$ и $-1<y<0$ Следовательно, $-1<\log_2\sin x<0$ и $\sin x>\frac{1}{2}$.

389. $k\pi+\frac{\pi}{3}<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$; $k\pi<x<k\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Указание. Область допустимых значений определяется соотношениями $\operatorname{tg}x>0$, $\operatorname{tg}x\neq1$ Положим $\log_3\operatorname{tg}x=y\neq0$ Получим $\frac{1}{y^2}<\frac{1}{y}+2$, $2y^2+y-1>0$, $(y+1)(2y-1)>0$ Отсюда $y<-1$, $y>\frac{1}{2}$ и соответственно $0<\operatorname{tg}x<\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}x>\sqrt{3}$.

390. $k+\frac{1}{4}<x<k+\frac{3}{4}$, где k — любое целое число. Решение Положим $4^{\sin^2\pi x}=y>0$. Получим $y+\frac{12}{y}<8$, $y^2-8y+12<0$, $(y-2)(y-6)<0$, $2<y<6$. Отсюда $2<4^{\sin^2\pi x}<6$, $4^{\sin^2\pi x}>2$, $\sin^2\pi x>\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(1-\cos2\pi x)>\frac{1}{2}$, $\cos2\pi x<0$, $2k\pi+\frac{\pi}{2}<2\pi x<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$

391. $\frac{4k+1}{4} < x < \frac{2k+1}{2}$; $\frac{2k+1}{2} < x \leqslant k+1$. Решение. Здесь должно быть $x \neq \frac{2k+1}{2}$ Положим $3^{\operatorname{tg}\pi x} = y > 0$ Тогда данное неравенство примет вид $\left|y - \frac{3}{y}\right| \geqslant 2$ или $|y^2 - 3| \geqslant 2y$. Если $y \geqslant \sqrt{3}$, то $y^2 - 3 \geqslant 2y$, $y^2 - 2y - 3 \geqslant 0$, $(y-3)(y+1) \geqslant 0$ и $y \geqslant 3$ Следовательно, $3^{\operatorname{tg}\pi x} \geqslant 3$, $\operatorname{tg}\pi x \geqslant 1$, $k\pi + \frac{\pi}{4} \leqslant \pi x < k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\frac{4k+1}{4} \leqslant x < \frac{2k+1}{2}$. Если же $y < \sqrt{3}$, то $3 - y^2 \geqslant 2y$, $y^2 + 2y - 3 \leqslant 0$, $(y+3)(y-1) \leqslant 0$ и $0 < y \leqslant 1$. Следовательно, $3^{\operatorname{tg}\pi x} \leqslant 1$, $\operatorname{tg}\pi x \leqslant 0$, $k\pi + \frac{\pi}{2} < \pi x \leqslant k\pi + \pi$, $\frac{2k+1}{2} < x \leqslant k+1$.

392. $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \operatorname{arctg} 3 + k\pi$. Указание Положить $\operatorname{tg} x = y$ и рассмотреть два случая $y > 1$ и $0 < y < 1$

393. $x = k\pi$. Указание. Так как $0 < \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}} < 1$, то, потенцируя, получим $\cos^2 2x - \sin^2 x > \cos^2 2x$ или $\sin^2 x \leqslant 0$

394 $2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Указание Положив $\log_{\sin x} \operatorname{tg} x = y$, придем к неравенству $\frac{y^2 - y - 2}{y} < 0$ или $(y+1)y(y-2) < 0$, которое равносильно данному при условии $\operatorname{tg} x > 0$, $\sin x > 0$.

395 $-2 < x \leqslant 1$; $x \geqslant 4$

396. $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x < 0$; $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

397. 70°, 30° 80°. Решение Проведем $MK \parallel BC$, где K — точка пересечения MK и AC В равнобедренной трапеции $CBMK$ диагонали CM и BK равны, пересекаются в точке O и образуют два равносторонних треугольника $\triangle COB$ и $\triangle MOK$ Проведя отрезок ON, получим два равнобедренных треугольника $\triangle CON$ с углами 20°, 80°, 80° и $\triangle OKN$ с углами 100°, 40°, 40°. Но тогда $\triangle KMN = \triangle NMO$ и $\angle NMO = \frac{1}{2} 60° = 30°$.

398 $\frac{11}{12}$ Указание Если в $\triangle ABC$ $AB = BC$, BD — высота треугольника и H — ортоцентр, то $\triangle AHD \sim \triangle BDC$.

399 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$, $\frac{4}{3}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}(9 - 5\sqrt{3})$ Указание. Искомая точка O лежит на высоте BE треугольника ABC, проведенной к стороне $AC = 8$. Пусть ее расстояние до боковой стороны BC есть OD Очевидно, $\triangle OBD \sim \triangle BEC$

400. $-\frac{8}{3}\sqrt{6}$ Указание Найти большую высоту треугольника и проекцию большей стороны на меньшую сторону. Затем воспользоваться теоремой об отношении площадей подобных треугольников.

401. $\frac{3\sqrt{3}}{8}(3 + \sqrt{5})$ Указание. Если длина стороны данного треугольника есть x, то, пользуясь теоремой косинусов для одного из трех треугольников, на которые разбит данный, получим $4 = 1 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cos 30°$.

402. 3. Указание Одна из сторон квадрата отсекает от данного треугольника подобный ему треугольник

403. 1 и 2. Указание. Применить теорему об отношении площадей треугольников, имеющих общий угол.

404. $\sqrt{3}-1$. Указание. Если $\triangle ABC$ после поворота занял положение $\triangle A_1B_1C_1$ и прямые AB и BC пересеклись с прямой B_1C_1 в точках M и N, то искомая площадь равна разности между площадью $\triangle ABC$ и утроенной площадью $\triangle MBN$. Треугольник MBN прямоугольный, $\angle BNM=30°$. Поэтому, положив $BM=x$, получим $BN=2x$, $MN=x\sqrt{3}$ и для отыскания x придем к уравнению $x+2x+x\sqrt{3}=BC$.

405. $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$, где S — площадь треугольника. Указание. Подсчитаем площадь S как сумму площадей треугольников AOB, BOC, COA, используя для этого формулу $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, а затем применим к каждому из этих треугольников теорему косинусов.

406. $2\arcsin\dfrac{h_ah_b}{l(h_a+h_b)}$. Указание. Пусть в данном $\triangle ABC$ биссектриса $CC_1=l$. Положим $CB=a$, $AC=b$ и $\angle ACB=\alpha$. Тогда, подсчитав площадь $\triangle ABC$ как сумму площадей треугольников ACC_1 и BCC_1, получим $al\sin\dfrac{\alpha}{2}+bl\sin\dfrac{\alpha}{2}=ab\sin\alpha$. Кроме того, $a=\dfrac{h_b}{\sin\alpha}$, $b=\dfrac{h_a}{\sin\alpha}$.

407. Указание. Воспользоваться формулой Герона и задачами 19 и 20.

408. 4 : 5.

409. $\dfrac{ab}{a-b}$. Указание. Если x — искомая длина, то $\dfrac{x-b}{b}=\dfrac{x}{a}$.

410. 15 и 10.

411. $\sqrt{33}$ и $\sqrt{42}$.

412. $\dfrac{2a}{a+b}\sqrt{b(a+b)}$, $\dfrac{2b}{a+b}\sqrt{a(a+b)}$. Указание. Пусть BC и AC — катеты и K лежит на AC. Очевидно, $\triangle AOK\sim\triangle OBM$ и $\triangle ABC\sim\triangle OBM$.

413. $\dfrac{bc\sqrt{2}}{b+c}$. Указание. Через основание биссектрисы провести прямые, параллельные катетам.

414. $[(b+c)^2-a^2]:a^2$. Указание. Пусть в $\triangle ABC$ основания медианы, биссектрисы и высоты, проведенных к стороне $CB=a$, суть E, M и D. Отрезок CM легко найти на основании теоремы о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника, а CD — используя теорему о квадрате стороны треугольника, лежащей против острого угла.

415. Указание. Пусть в $\triangle ABC$ D — основание биссектрисы l и E — конец отрезка $AE=m$ биссектрисы внешнего угла, причем $\angle DAE=90°$. Обозначив искомую площадь через S, получим $S:\dfrac{1}{2}lm=BC:DE$, где B лежит между D и E. Положив $CB=a$, $DB=x$, $BE=y$ и воспользовавшись теоремами о свойствах биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника, получим $DE=x+y=\dfrac{2abc}{b^2-c^2}$.

416. $\dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$, где $2p=a+b+c$. Указание. См. замечание к примеру 272.

417. $\dfrac{8s^2}{a^2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}$, где S — площадь треугольника. Указание. Найти медиану и воспользоваться теоремой: квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета на гипотенузу.

418. $\frac{a^2-b^2}{2c}$, $a>b$ Указание Искомая проекция x медианы m найдется из системы $a^2=m^2+\frac{c^2}{4}+cx$; $b^2=m^2+\frac{c^2}{4}-cx$.

419. $\sqrt{k^2 \pm 2S\sqrt{3}}$, где S — площадь треугольника и $2k^2=a^2+b^2+c^2$ Указание Пусть $AD>AD'$, O — середина BC, K — проекция A на DD^1. Тогда $AD^2=OD^2+AO^2+2\,OD\cdot OK$, $AD'^2=OD'^2+AO^2-2\cdot OD'\cdot OK$, причем $OK=h_a=\frac{2S}{a}$, $AO^2=m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$.

420. 9 Указание Провести медиану AP треугольника KAO

421. 1 или $0{,}5(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)$. Указание Проведем $BK\parallel AC$, где K — точка пересечения прямых BK и MN, и положим $AM=KB=x$ Проведем $OD\parallel BC$, где D — точка на стороне $AC=2a$ Из подобия треугольников KBN и ODM найдем, что $BN=\frac{ax}{a-x}$, если O лежит между M и N, и $BN=\frac{ax}{x-a}$, если M лежит между O и N. Воспользовавшись затем соотношением $S_{\triangle OBN}-S_{\triangle OAM}=S_{\triangle ABC}$, придем к квадратному уравнению относительно x.

422. $6r^2$.

423 $\frac{m}{n\cos\alpha}$ Решение Пусть высота BE, проведенная к стороне AD, пересекает диагональ AC в точке K Проведем $KP\parallel AB$, где P — точка на AD, и $EF\parallel AB$, где F — точка пересечения EF и AC. Заметив, что $AE=AB\cos\alpha$, рассмотрим три пары треугольников ADC и AEF, EFK и BAK, EFA и PKA Из подобия этих треугольников получим $\frac{CD}{AD}=\frac{EF}{AE}=\frac{EF}{AB\cos\alpha}$ (*), $\frac{AE}{AD}=\frac{EF}{AB}=\frac{KF}{AK}=\frac{PE}{AP}$, $\frac{AE}{AD}=\frac{PE}{AP}$, $\frac{AE}{PE}=\frac{AD}{AP}$, $\frac{AP+PE}{PE}=\frac{m+n}{m}$, $\frac{AP}{PE}+1=1+\frac{n}{m}$, $\frac{PE}{AP}=\frac{m}{n}=\frac{EF}{AB}$ Остается подставить $\frac{EF}{AB}=\frac{m}{n}$ в равенство (*).

424. $\sqrt{a(a+b)}$; $\sqrt{b(a+b)}$ Указание. Пусть в трапеции $ABCD$ диагональ $BD\perp AD$ Так как $\angle ABD=90^\circ-\angle BAD=\angle BCD$, то $\triangle ABD\sim\triangle DCB$. Отсюда $BD=\sqrt{ab}$.

425 $\frac{12}{5}$. Указание. Пусть данный ромб $ABCD$ после поворота вокруг центра O на 90° занял положение $A_1B_1C_1D_1$, причем стороны AB и B_1C_1 пересеклись в точке K. Искомая площадь равна восьми площадям $\triangle OKC_1$. С другой стороны, если положить площадь $\triangle KC_1B$ равной x, то площадь $\triangle OKC_1$ будет равна $2x$, а площадь ромба $20x$

426. $\frac{1}{2}(R+h)\sqrt{R^2-h^2}$. Указание. Продолжив AO до пересечения с окружностью в точке K, видим, что $\angle KOM=\angle OAB$, и, следовательно, $OM\parallel AB$. Поэтому $S=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBM}$.

427 $MP=R$. Указание. Пусть K — середина AB. Получаем $MP^2=P_1M^2+PP_1^2=P_1M^2+PK^2-KP_1^2=PK^2+OP_1^2-KP_1^2=PK^2+OK^2=AK^2+OK^2=R^2$.

428. $\frac{2r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

429. $\dfrac{2R^2p(p+q)\sin 2\varphi\cos^2\varphi}{p^2+q^2+2pq\cos 2\varphi}$. Указание Проведем $AK\perp BC$, где K — точка пересечения AK и CB, и пусть L — точка пересечения CB и диаметра EF, перпендикулярного CB Искомая площадь $S=\frac{1}{2}BC\cdot AK=BL\cdot AK$. Положим $BM=px$, $AM=qx$ и острый угол AMF равен φ. Из прямоугольных треугольников BML и BAK получим, что $BL=px\sin\varphi$, $AK=(p+q)x\cos\varphi$ Отсюда $S=p(p+q)x^2\cos\varphi\sin\varphi$ Величина x^2 найдется из соотношения $CK^2+KA^2=CA^2$, если заметить, что $CK=BC-BK=(p-q)x\sin\varphi$, а $AC=2R\cos\varphi$ на основании теоремы синусов

430. Указание Пусть углы C, A, B измеряются числами x, $2x$, $4x$ Центр K лежит на пересечении биссектрисы внутреннего угла B треугольника ABC с биссектрисой его внешнего угла C, а L — на пересечении биссектрис внутреннего угла A и внешнего угла C Далее легко убедиться, что $\angle KOL=4x$ и $\angle OLK=2x$

431. $8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Указание Угол $C_1A_1B_1$ измеряется полусуммою дуг AC_1 и AB_1 и поэтому равен $\frac{1}{2}(\gamma+\beta)$ Аналогично определяются другие углы $\triangle A_1B_1C_1$ через α, β и γ Остается воспользоваться формулой площади треугольника $S=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

432. Окружность радиуса AB с центром в середине O отрезка AB Указание Левая часть равенства напоминает одно из слагаемых в теореме косинусов Применив ее к треугольнику AMB, найдем $AM^2+MB^2=\frac{5}{2}AB^2$. Если теперь построить параллелограмм $AMBN$, где $AM\parallel NB$, $MB\parallel AN$, то, применив теорему о зависимости между сторонами и диагоналями параллелограмма, найдем, что $4OM^2=5AB^2-AB^2=4AB^2$ и $OM=AB$.

433 $(c+r)r$.

434. $\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{b}{2a-b}}$ Указание Пусть M и N — точки касания боковых сторон AB и BC треугольника ABC с вписанной в него окружностью Проведем $MD\perp AC$ и диаметр ME, где D лежит на AC, а E — на окружности. Так как $\triangle AMD\sim\triangle MNE$, то для искомого радиуса x получим следующее уравнение $\dfrac{\sqrt{4x^2-b^2}}{b}=\dfrac{a-b}{2\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-b^2}\right)}$.

435. $\dfrac{h\sin|\alpha-\beta|}{2\sin\alpha\sin\beta+\sin|\alpha-\beta|+\sqrt{4\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2(\alpha-\beta)}}$ Указание. Пусть $\alpha>\beta$ Положим $DF=x$. Тогда искомый радиус $r=\frac{2S}{2p}=\frac{hx}{h+x+\sqrt{x^2+h^2}}$ Но $x=AF-AD=\frac{1}{2}(AD+DB)-AD=\frac{1}{2}(DB-AD)=\frac{1}{2}(h\operatorname{ctg}\beta-h\operatorname{ctg}\alpha)$

436. $\frac{1}{4}(8\sqrt{3}-9)$ Указание Искомая площадь найдется как разность между площадью вписанного в данную окружность квадрата и суммою площадей трех прямоугольных треугольников Эти последние равны $\frac{1}{4}$, $2-\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$.

437. $\frac{2}{3}(9-2\sqrt{3})$. Указание Искомая площадь найдется как разность между площадью квадрата, сторона которого 2, и удвоенной площадью прямоугольного треугольника, принадлежащего квадрату, но не принадлежащего описанному равностороннему треугольнику. Длины катетов этого треугольника $\frac{1}{3}(3-\sqrt{3})$ и $\sqrt{3}-1$

438. $\frac{S}{l}$. Указание Пусть данный треугольник есть ABC, а данная трапеция — $DMNL$, причем $DM \parallel AB$ и $NL \parallel BC$. Проведем диаметр BP, пересекающий основание AC треугольника ABC в точке Q, и высоту MK данной трапеции, где K — точка на большем основании DL. Так как $DL = BP$, как диаметры, $\angle DML = \angle PAB = 90°$ и $\angle MLD = \angle ABP$, как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами, то $\triangle DML = \triangle PAB$ Отсюда следуют равенства $AQ = MK = h$, $AB = ML$. Но тогда $\triangle MKL = \triangle AQB$, так что $BQ = KL = l$. Теперь имеем $S = AQ \cdot BQ = hl$

439. $\frac{2}{3}r$. Указание. Пусть ближайшая к A точка пересечения данной окружности с секущей AQ есть M, центр этой окружности находится в точке O, а центр окружности искомого радиуса y — в точке C. Положим $AM = x$. Так как $AP^2 = 2AP \cdot AM$ и $AP = 2AM$, то легко найдем, что $AP = 2x$, $AO = r + x$ Если теперь заметить, что площадь $\triangle AOP$ получится, если из суммы площадей треугольников APC и AOC вычесть площадь $\triangle POC$, то придем к равенству $2xr = 2xy + (r + x)y - ry$, из которого и найдется y

440. $\frac{a^2}{8}$ Указание Точка касания окружности с меньшей боковой стороной трапеции делит эту сторону пополам Соединив точку касания с концами большей стороны, получим два подобных треугольника, прилежащих к основаниям трапеции

441. $\frac{4R}{\sqrt{10}}$ Указание Пусть $ABCD$ — данный квадрат, вершины которого B и C лежат на окружности радиуса R с центром в O и сторона которого равна x Проведем касательную $AK = 2x$ к этой окружности, где K — точка касания Пусть прямая OE, соединяющая центр O окружности с центром E квадрата, пересекается с BC в точке M, а с AD — в точке L. Из треугольников OMC, OAL и OKA найдем: $\left(\sqrt{R^2 + (2x)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - x\right)^2 + \frac{x^2}{4} = R^2 = OC^2$ Отсюда получим $x = \frac{2R}{\sqrt{10}}$, а тогда (см. $\triangle OMC$) искомое значение $OE = y$ найдется из равенства $y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{x}{2}$.

442. Острый угол $\alpha = \arcsin\frac{4}{\pi m}$. Указание Пусть искомый угол есть α. Соединив центр O вписанной в трапецию окружности радиуса r с концами A и B боковой стороны трапеции, найдем из треугольников OBC и OCA, что $AB = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2r}{\sin\alpha}$, $2p = \frac{8r}{\sin\alpha}$, $\frac{pr}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi\sin\alpha} = m$, $\sin\alpha = \frac{4}{\pi m}$, где p — полупериметр трапеции.

443. $\frac{4S}{K}$, где S — площадь треугольника со сторонами m, n и k. Указание. Соединив центры окружностей с одним из концов хорды, длину x

которой нужно найти, получим треугольник со сторонами m, n, k. Площадь этого треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} k$

444. $r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{5} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{5} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1} \right)$. Указание. Пусть центр данной окружности находится в точке O, вписанной — в точке C, точка пересечения данной хорды с диаметром есть M, а точка касания диаметра с вписанной окружностью — K. Из $\triangle MCK$ находим, что искомый радиус $x = MK \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, а $MK = x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ (*). Но $OM = \frac{r}{5}$ и, пользуясь треугольником OKC, получим $MK = OM + OK = \frac{r}{5} + \sqrt{(r-x)^2 - x^2} = \frac{r}{5} + \sqrt{r^2 - 2rx}$. Подставляя сюда значение MK из равенства (*), придем к уравнению для определения x.

445. $\frac{1}{4} r$. Указание. Искомый радиус x найдется из уравнения $(r-x)^2 - x^2 = \left(\frac{r}{2} + x \right)^2 - \left(\frac{r}{2} - x \right)^2$.

446. $(3 - 2\sqrt{2})r$.

447. $\frac{4r^2}{1 + \left(2 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^2}$.

448. $\left(\sqrt{r^2 + S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}} \pm \sqrt{r^2 - S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}} \right) \sin \frac{\alpha}{2}$ и $\frac{1}{2} \left(\sqrt{r^2 + S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}} \mp \sqrt{r^2 - S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}} \right)$, если $r^2 \geqslant S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$. При $r^2 < S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$ задача не имеет решения. Решение. Предположим, что задача имеет решение и прямоугольник $ABCD$ — искомый. При этом вершины A и B лежат на радиусах OM и ON данного сектора, вершины C и D — на дуге сектора и прямоугольник симметричен относительно биссектрисы угла сектора. Если биссектриса пересекает стороны AB и CD соответственно в точках E и F, то из $\triangle OFC$ получим $FC^2 + FO^2 = OC^2$ (*). Полагая $FC = x$, $FE = y$ и замечая, что $FO = y + x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $OC = r$ и $2xy = S$, перепишем равенство (*) так $x^2 + \left(y + x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 = r^2$ или $x^2 \csc^2 \frac{\alpha}{2} + y^2 + S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = r^2$ (**). Но $x^2 \csc^2 \frac{\alpha}{2} + y^2 + S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \left(x \csc \frac{\alpha}{2} + y \right)^2 - 2xy \csc \frac{\alpha}{2} + S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \left(x \csc \frac{\alpha}{2} + y \right)^2 - S \cdot \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \left(x \csc \frac{\alpha}{2} + y \right)^2 - S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$. Учитывая это, представим равенство (**) в виде $\left(x \csc \frac{\alpha}{2} + y \right)^2 - S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} = r^2$ или $x \csc \frac{\alpha}{2} + y = \sqrt{r^2 + S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}$ (1). Аналогично получим уравнение $x \csc \frac{\alpha}{2} -$

$-y=\pm\sqrt{r^2-S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}}$ (2). Решая систему уравнений (1) и (2) относительно x и y, придем к формулам, приведенным выше в ответе. Если $r^2\geqslant S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$, то все примененные действия и полученные значения для x и y имеют смысл. Кроме того, так как $r^2+S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}>r^2-S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$, то оба значения для x и y положительны и, как легко проверить, $2xy=S$. Если еще учесть, что $y<r$ и $2x<2r\sin\frac{\alpha}{2}=MN$ (см. равенство (**)), то этого достаточно, чтобы утверждать, что найденные значения $2x$ и y доказывают существование вписанного прямоугольника с площадью S и определяют длины его сторон. Их будет два, если $r^2>S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$, и один, если $r^2=S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

При решении мы предполагали прямоугольник симметричным относительно биссектрисы угла сектора. Что иного расположения для вписанного прямоугольника быть не может, предлагаем доказать читателю.

449. $PQ=3$. Решение. Пусть T — середина отрезка AD. Так как четырехугольник $KLMT$ — параллелограмм, то точка Q лежит на прямой LT и отрезок $QP=\frac{1}{2}TN$, как средняя линия $\triangle TLN$. С другой стороны, отрезок TN — тоже средняя линия, но $\triangle ADE$. Поэтому $QP=\frac{1}{2}TN=\frac{1}{4}AE=3$.

450. $\frac{1}{5}\sqrt{9a^2+4b^2+25c^2-12ab\cos\alpha}$, $\frac{1}{5}\sqrt{9a^2+9b^2+25c^2+18ab\cos\alpha}$. Указание. Через точку O проведем отрезок C_1D_1, равный и параллельный отрезку CD. Тогда из $\triangle OBD_1$ с помощью теоремы косинусов найдем отрезок BD_1, а из $\triangle BD_1D$ — искомый отрезок BD. Для отыскания BC нужно обратиться к треугольникам OC_1B и BC_1C.

451. Указание. Пусть $OK\perp PM$, где K — точка на PM. Положим $AM=a$, $BP=c$, $AO=OB=b$, $KM=x$. Очевидно, $OM^2=a^2+b^2$, $OP^2=b^2+c^2$, $PM^2=a^2+c^2+4b^2$. Если эти величины подставить в равенство $OM^2-x^2=OP^2-(PM-x)^2$ и затем решить это равенство относительно x, то найдем, что $x=a$, конечно, используя при этом равенство $2ac=4b^2$. Затем получим $OK=\sqrt{OM^2-x^2}=b$.

452. $\operatorname{arctg}\sqrt{7}$ и $\frac{\sqrt{21}}{7}a$. Решение. Проведем $CM\parallel AB$ и $SM\perp CM$, где M — точка пересечения CM и SM. Тогда для искомого угла x получим $\operatorname{tg}x=\frac{SM}{CM}=\frac{\sqrt{a^2+\frac{3}{4}a^2}}{\frac{1}{2}a}=\sqrt{7}$. Проведем $AK\perp$ пл. SCM, где K — основание AK на пл. SCM. Так как пл. $ASM\perp CM$ и, следовательно, пл. $ASM\perp$ пл. CSM, то точка K лежит на SM и AK является высотой $\triangle ASM$. Поэтому $KA=\frac{AS\cdot AM}{SM}=\frac{a\cdot a\sqrt{3}\cdot 2}{2a\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}a$. Это и есть искомое расстояние, так как $AB\parallel$ пл. SCM и AK — расстояние от прямой AB до пл. SCM.

453. $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. Указание Проекция площади прямоугольного $\triangle DAE$ на плоскость P равна площади $\triangle ABC$.

454. $\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Указание Провести плоскость, отсекающую на каждом ребре данного трехгранного угла равные отрезки, считая от вершины Затем рассмотреть образовавшуюся при этом правильную пирамиду.

455. $a\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Указание. Через данную точку M провести плоскость ABC, отсекающую от трехгранного угла правильную пирамиду $DABC$ с вершиной D, и рассмотреть подобные треугольники DMN и MKN, где N — середина BC, K — основание перпендикуляра MK на грань DBC. Полезно выразить DN и MN через $x = BC$.

456. $2\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

457. 1 : 2 Решение Пусть плоскость, делящая ребро C_1B_1, пересекает ребра B_1C_1, A_1D_1, BC соответственно в точках E, M, N. Проведем $NK \parallel BB_1$, где K — точка, лежащая на B_1C_1 Положим $EC_1 = x$ Тогда, очевидно, $B_1K = BN = x$ и $A_1M = EC_1 = x$. Но $\triangle AA_1M = \triangle NKE$, так что и $KE = A_1M = x$. Итак, $B_1E = 2x$ и $C_1E\ B_1E = x : 2x = 1 . 2$

458. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. Указание Пусть K и M — середины ребер B_1C_1 и C_1D_1 Прямые KM, A_1D_1, A_1B_1 лежат в одной плоскости и не параллельны, поэтому KM пересекается с A_1D_1 и A_1B_1. Соединяя каждую из точек пересечения с A, убедимся, что плоскость AMK пересекает боковые ребра DD_1 и BB_1 в некоторых точках N и P. Таким образом, в сечении плоскости с кубом получится пятиугольник $KMNAP$. Он состоит из равнобедренной трапеции $KMNP$ с основаниями $NP = \sqrt{2}$ и $MK = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ и равнобедренного $\triangle ANP$ с основанием $NP = \sqrt{2}$. Если провести высоты AO_1 и O_1T_1 треугольника и трапеции и спроектировать их на плоскость основания куба, то из треугольников AO_1O и AT_1T, где O и T — проекции O_1 и T_1 на AC, найдем $A_1O = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$, $O_1T_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$.

459. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Указание. Пусть K и M — середины ребер AB и BC, а O — центр куба. Плоскость OKM пересекает диагональную плоскость AA_1C_1C по прямой, параллельной KM, а поэтому проходит через середины ребер AA_1 и CC_1. Аналогично можно показать, что эта плоскость пересекает ребра A_1D_1 и C_1D_1 также в серединах. Таким образом, в сечении плоскости OKM с кубом получается шестиугольник. Нетрудно показать, что это правильный шестиугольник, длина стороны которого равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

460. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Указание. Искомое расстояние равно расстоянию между двумя плоскостями, проходящими через концы обеих троек куба, сходящихся в концах одной и той же диагонали куба.

461. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. Указание. Сечение есть правильный шестиугольник, сторона которого равна половине диагонали грани куба.

462. $\operatorname{arctg}\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{4}{5}$.

463. 7 : 29. Указание Пусть K — середина ребра $BC = x$ и O — центр грани DD_1C_1C. Если продолжить AK до пересечения с прямой DC_1 а затем через полученную точку пересечения и точку O провести прямую, то станет ясно, что плоскость AOK отсекает от куба усеченную треугольную пирамиду Высота этой пирамиды равна x, катеты одного основания x и $\frac{2}{3}x$, а другого — $\frac{1}{2}x$ и $\frac{1}{3}x$.

464 1 : 47. Решение. Середину E отрезка PM соединим отрезками прямых с N и A. Прямая NE пересекает диагональ A_1C_1 грани куба в некоторой точке F. Пусть ребро куба равно a. Так как $A_1F \; AE = A_1N \cdot AN =$ $= 3 : 5$ и $AE = \frac{5a}{2\sqrt{2}}$, то $A_1F = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$ Поэтому $FC_1 = a\sqrt{2} - \frac{3}{4}a\sqrt{2} =$ $= \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Плоскость MNP отсекает от куба правильную пирамиду с апофемой FC_1 и плоским углом при вершине, равным 90°. Ее боковое ребро равно $\frac{1}{2}a$, а объем $\frac{1}{48}a^3$.

465. $\frac{h^2 \sin\beta}{\sin^2\alpha}\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

466. $\frac{2\sqrt{2}\,a^2\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)}{\sin\beta\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}} - \frac{2a^2\cos^2\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. Указание. Если длина другой стороны основания есть x, то высота параллелепипеда и длины диагоналей боковых граней будут $x\operatorname{tg}\beta$, $\frac{x}{\cos\beta}$ и $\sqrt{\frac{x^2}{\cos^2\beta}+a^2}$ Если теперь воспользоваться теоремой косинусов для треугольника, у которого один из углов α, то легко найдем x, высоту параллелепипеда и его полную поверхность.

467. $2ab\sqrt{ab}\sin\alpha\sqrt{-\cos\alpha}$.

468. $\arccos\frac{c^2-d^2}{\sqrt{(c^2+d^2)^2-4(a^2-b^2)^2}}$. Указание. Если высоту параллелепипеда положить равной h, то стороны основания будут $\sqrt{a^2-h^2}$ и $\sqrt{b^2-h^2}$ Величина h найдется, если воспользоваться зависимостью между сторонами и диагоналями параллелограмма. После этого для отыскания искомого угла следует обратиться к теореме косинусов

469. $\frac{1}{4}\sqrt{M^2N^2-(a^2-a_1^2)^2}$, где $M^2 = a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2$, $N^2 = a^2 + a_1^2 + c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2$ Указание Искомая площадь $S = mn\sin\alpha$, где m и n — длины сторон грани с диагоналями a и a_1, а α — острый угол между сторонами Применив теорему косинусов к треугольнику, стороны которого m, n, a, найдем $\cos\alpha$, а затем и $\sin\alpha$. Величины m и n выразятся через данные задачи на основании теоремы о зависимости между диагоналями и сторонами параллелограмма, примененной к трем различным граням параллелепипеда.

470. $2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\sin\frac{3}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2}}$.

471. 5. Указание. Пусть в тетраэдре $CABD$ точки E и F — середины ребер $AB = 6$ и $CD = 8$. Центр O шара находится на отрезке $EF = 7$. Положив $OF = x$, легко найдем x из треугольников OCF и OBE, где OC и OB являются искомыми радиусами.

472. 49 : 95. Решение Пусть прямая MP, где P — середина A_1C_1, пересекает ребро B_1C_1 в точке K; прямая MN, где N — середина ребра BB_1, пересекает ребро AB в точке L и прямую A_1A в точке T; наконец, точка пересечения прямой TP с ребром AC есть Q Объем тела, отсеченного от данной призмы плоскостью MPN и примыкающего к грани AA_1B_1B, равен $V_1 - V_2 - V_3$, где V_1, V_2, V_3 — объемы пирамид TMA_1P, NMB_1K, $TLAQ$. Положим объем данной призмы, равным V, ее высоту — h, сторону основания — a. Так как $LB = B_1M$ ($\triangle LBN = \triangle MB_1N$), то $AL = \frac{a}{2}$, и из пропорции $AL : A_1M = AT \cdot A_1T$ найдем $AT = \frac{1}{2}h$ Поэтому $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \times$ $\times A_1P \cdot A_1M \cdot \sin 60° \cdot A_1T = \frac{3}{8} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} h = \frac{3}{8} V$ Проведем среднюю линию PD треугольника $A_1B_1C_1$ Тогда найдем, что $KB_1 = \frac{1}{2} PD = \frac{a}{4}$ и $V_2 =$ $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot KB_1 \cdot B_1M \sin 120° NB_1 = \frac{1}{48} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{48} V$. Из пропорции $AQ \cdot A_1P = AT : A_1T$ получим $AQ = \frac{1}{3} A_1P = \frac{a}{6}$. Но тогда $V_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AQ \cdot AL \sin 60° \cdot AT = \frac{1}{72} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} h = \frac{1}{72} V$. Итак, $V_1 - V_2 -$ $- V_3 = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{48} - \frac{1}{72}\right) V = \frac{49}{144}$.

473. 13 23 Решение. Проведем прямые MB_1 и MK Пусть P — точка пересечения MB_1 с ребром AA_1, N — точка пересечения прямой MK с ребром BC. Соединив отрезками прямых точки P и K, а затем точки B_1 и N, видим, что объем многогранника B_1PAKNB есть разность объемов V_1 и V_2 пирамид B_1MNB и $PMKA$. Положим, что объем данной призмы равен V, ее высота h, а сторона основания a. Проведем среднюю линию AQ треугольника BMN. Так как $BN = 2AQ$, а $NC = AQ$ ($\triangle AQK = \triangle KNC$), то $BN = \frac{2}{3} a$. Теперь получим $V_1 - V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \times$ $\times \frac{2}{3} a \cdot 2a \sin 60° \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \sin 120° \cdot \frac{1}{2} h = \frac{13}{36} V$.

474. $S\sqrt[4]{3}\sqrt{S\cos\alpha}\sin\alpha$. Указание Площадь основания призмы есть проекция площади S на плоскость основания

475. 2, 2, $2\sqrt{2}$. Решение. Пусть катеты треугольника x и y Тогда боковая поверхность призмы $S = (x + y + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}$, а если положить $x + y = z$ и учесть, что $xy = 4$, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = z^2 - 8$, то получим $S = (z + \sqrt{z^2 - 8})\sqrt{z^2 - 8}$. Очевидно, наименьшего значения S достигнет при наименьшем значении z. Но $z = x + y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 4$ и наименьшее значение z будет при $x = y$. А так как $xy = 4$, то $x = y = 2$.

476. $\frac{d^2\sqrt{2}}{\sin\varphi}$

477. $\frac{27}{28} S$. Указание. Обозначим сторону основания данной призмы буквой a. Первое сечение есть шестиугольник, состоящий из двух равных трапеций, с основаниями $2a$ и $\frac{3}{2} a$ Обозначив высоту трапеции буквой h,

найдем площадь этого шестиугольника $S = \left(2a + \frac{3}{2}a\right)h = \frac{7}{2}ah$. Второе сечение — тоже шестиугольник, состоящий из двух трапеций, но трапеции не равны между собой. Основания и высота одной из них равны соответственно $2a$, $\frac{7}{4}a$ и $\frac{1}{2}h$, а другой — $2a$, $\frac{5}{4}a$ и $\frac{3}{2}h$. Поэтому искомая площадь $S_1 = \frac{15}{16}ah + \frac{39}{16}ah = \frac{27}{8}ah = \frac{27}{28}S$.

Решению поможет аккуратно выполненный чертеж.

478. $\frac{2r^2 \sin^2\alpha}{3\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

479. $\frac{2b}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\sin\left(30^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2} - 30^\circ\right)}$. Указание. Опустить из середины стороны основания перпендикуляр на противоположное ребро, восставить перпендикуляр к этой стороне в плоскости основания и провести высоту пирамиды. Два из образовавшихся при этом треугольников будут подобны, причем некоторые их стороны следует выразить через сторону основания x и угол φ.

480. $\frac{a}{12\cos\varphi}\sqrt{3 + 9\cos^2\varphi}$.

481. $\frac{a^3}{128}\operatorname{tg}\varphi$ и $\frac{13a^3}{384}\operatorname{tg}\varphi$.

482. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}\sqrt{(4 + \operatorname{ctg}^2\alpha)^3}\operatorname{tg}\alpha$. Указание. Если положить длину ребра основания равной x, то получим, что объем $V = \frac{x^3}{12}\operatorname{tg}\alpha$. Чтобы выразить x через a и α, следует рассмотреть сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ее высоту и боковое ребро.

483. $\frac{9}{8}\cdot\frac{a^3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}$. Указание. Пусть K — вершина пирамиды, ABC — ее основание, $KO = h$ — высота, $OP \perp AK$, $QP = a$. Положив $AB = x$, найдем объем $V = \frac{x^2\sqrt{3}}{12}h$, причем значение $h = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - 3a^2}}$ найдется из пропорции $h : AO = OP : AP$, где $AP = \sqrt{\frac{x^2}{3} - a^2}$. Чтобы выразить x через a и α, проведем $BM \perp AK$ (M лежит на AK) и прямую MC. Так как $\angle BMC = \alpha$, а $MN = \frac{3}{2}a$, то $x = BC = 3a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

484. $\frac{9a^3\cos^3\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3}{2}\alpha}$. Указание. Пусть K — вершина пирамиды, ABC — ее основание, $KO = h$ — высота, KD — апофема, $OM \perp KD$, $OM = a$. Положив $BC = x$, найдем объем пирамиды $V = \frac{x^2\sqrt{3}}{12}\cdot h$, причем $h =$

$=\sqrt{3}\,a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ найдется из пропорции h $OM=KD\cdot OD$, где $OD=\frac{x\sqrt{3}}{6}$, $KD=\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ Значение x найдем из соотношения $KD^2-OD^2=h^2$. Выполняя преобразования, следует учесть, что $3\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=3-$ $-4\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(3\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^3\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

485. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3\operatorname{ctg}^2\alpha\left(\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+4}\right)^3$. Указание Пусть K — вершина пирамиды, ABC — ее основание, $KO=h$ — высота, KD — апофема, $OM\perp AK$, $OM=a$ Положив $BC=x$, найдем объем $V=\frac{x^2\sqrt{3}}{12}h$, где $h=$ $=\frac{x\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$ Из пропорции $OK\,.\,OM=AK:AO$, где $AO=\frac{x\sqrt{3}}{3}$, $AK=$ $=\sqrt{\left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha\right)^2+\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2}$, найдем, что $x=a\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+4}$.

486. $2\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}\right)$.

487. $\operatorname{arctg}(2\operatorname{ctg}\alpha)$

488. $\operatorname{arctg}\frac{S^2\pm\sqrt{S^4-9V^2a^2}}{3aV}$ Указание. Пусть A — вершина данной пирамиды $AE=H=\frac{3V}{S}$ — ее высота и $BF=h=\frac{2S}{a}$ — высота равнобедренного треугольника, лежащего в основании пирамиды Легко доказать, что $\angle BAF=90^\circ$ и поэтому из $\triangle BAF$ получим $H^2=x(h-x)$, где $x=EF$.

489. $\frac{2}{3}h^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}^2\varphi$.

490 $\frac{32m^2n^2}{9(m^2-n^2)}\left(1+\frac{m}{\sqrt{2n^2-m^2}}\right)$. Указание. Пусть A — вершина пирамиды, ABC — ее боковая грань, $AO=H$ — высота пирамиды, $PM\perp AB$, $PN\perp AD$, где M лежит на ребре AB, а N — на апофеме AD. Так как $PM=m$, $PN=n$, то из треугольников APM и APN получим $AM=$ $=\sqrt{\left(\frac{3}{4}H\right)^2-m^2}$, $AN=\sqrt{\left(\frac{3}{4}H\right)^2-n^2}$. Но треугольники APN и ADO, также APM и ABO подобны, и из подобия найдем, что $OD=PN\times$ $\times\frac{OA}{AN}=\frac{nH}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}H\right)^2-n^2}}$, $OB=PM\cdot\frac{OA}{AM}=\frac{mH}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}H\right)^2-m^2}}$. А так как $OB^2=2OD^2$, то, подставляя сюда найденные значения OD и OB, придем к уравнению, из которого получим $H=\frac{4}{3}\frac{mn}{\sqrt{2n^2-m^2}}$. Теперь легко найдем $BC=2\cdot OD=\frac{4mn\sqrt{2}}{3\sqrt{m^2-n^2}}$, $AD=\sqrt{AO^2+OD^2}=$ $=\frac{2\sqrt{2}m^2n}{3\sqrt{(2n^2-m^2)(m^2-n^2)}}$ и искомую поверхность.

491. $3-2\sqrt{2}$. Указание. Пусть площадь боковой грани данной пирамиды S, площадь треугольника, отсеченного от боковой грани, противолежащей ребру AB, есть S_1, а каждая из остальных боковых граней отсеченной пирамиды имеет площадь, равную S_2. Тогда $\frac{S_1+2S_2+S}{4S}=\frac{1}{2}$, а так как $\frac{S_2}{S}=\sqrt{\frac{S_1}{S}}$, то, положив $\frac{S_1}{S}=t^2$, получим уравнение $t^2+2t-1=0$

492. $\frac{a\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}$.

493. $2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$.

494. $2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2S}\sqrt{b^4+3S^2}\right)$.

495. $2h^2\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$

496 $\operatorname{arctg}\left[\frac{(n-m)\sqrt{2}}{n+m}\operatorname{tg}\alpha\right]$.

497. $\frac{b^3\sin^2\varphi\cos\alpha\sin(\varphi-\alpha)}{6\cos\varphi\sin^2(\varphi+\alpha)}$.

498. 3 5. Решение Так как $AB\parallel CD$, то плоскость ABE пересекает грань KCD по прямой $EF\parallel AB$, где F — точка на ребре KD Плоскость $ABEF$ отсекает от данной пирамиды другую пирамиду — $KABEF$, которая плоскостью AKE рассекается еще на две пирамиды $AKEF$ и $AKEB$. Пусть объемы двух последних пирамид V_1 и V_2. Пусть, кроме того, объем данной пирамиды V, площадь ее боковой грани S, а расстояние от вершины основания до боковой грани h Тогда $V_1+V_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}Sh+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S\cdot h=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}V+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V=\frac{3}{8}V$.

499. 1 · 1. Решение. Проведем прямые MP и MN, где N — середина ребра AB, а P — середина KC. Пусть L — точка пересечения прямых MP и KB, E и T — соответственно точки пересечения прямой MN с прямыми AD и DC, а Q — точка пересечения прямой TP с ребром KD. Теперь видно, что объем многогранника, который отсекает плоскость MNP от данной пирамиды, считая от основания, равен V_1-2V_2, где V_1 и V_2 — объемы пирамид $PMTC$ и $LMNB$ (пирамиды $LMNB$ и $QTED$, очевидно, равновелики) Положим объем данной пирамиды равным V, сторону ее основания — a и высоту — h. Так как высота пирамиды $PMTC$, проведенная из P, равна $\frac{1}{2}h$, а $CM=CT=\frac{3}{2}a$, то $V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}a\right)^2\cdot\frac{h}{2}=\frac{9}{16}\times\frac{1}{3}a^2h=\frac{9}{16}V$ Проведем среднюю линию PF треугольника KBC. Тогда LB окажется средней линией $\triangle PMF$ и мы получим, что $LB:PF=1$ 2. Отсюда следует, что высота пирамиды $LMNB$, проведенная из L, равна $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h\right)=\frac{1}{4}h$, а так как $BM=BN=\frac{a}{2}$, то $V_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\times$

$\times \frac{h}{4} = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{3} a^2 h = \frac{1}{32} V$. Таким образом, $V_1 - 2V_2 = \frac{9}{16} V - \frac{1}{16} V = \frac{1}{2} V$

500. $29 \cdot 31$. Решение Пусть P — точка пересечения ребра KD с прямой MN, а Q — точка пересечения прямой MB с ребром AD Объем многогранника, который отсекает плоскость MBN от данной пирамиды, считая от основания, равен разности объемов V_1 и V_2 пирамид $NMBC$ и $PMQD$ Положим объем данной пирамиды, равным V, ее высоту — h и сторону основания — a. Высота пирамиды $MNBC$, проведенная из N, равна $\frac{h}{2}$, а так как $BC = a$, $CM = 3a$, то $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot 3a \cdot \frac{h}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} a^2 h = \frac{3}{4} V$. Проведем среднюю линию NF треугольника KDC. Тогда получим, что $PD:NF = 2 : \frac{5}{2} = 4 : 5$. Отсюда следует, что высота пирамиды $PMQD$, проведенная из вершины P, равна $\frac{4}{5}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2}{5} h$. Но $DM = 2a$, $DQ = \frac{2}{3} a$, и поэтому $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{2}{5} h = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{3} a^2 h = \frac{4}{15} V$, $V_1 - V_2 = \frac{29}{60} V$

501. $\frac{1}{6} a^3 \sin^2 \beta \operatorname{tg} \alpha$.

502. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)$

503 $\frac{4S \operatorname{ctg} 15^\circ}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin 15^\circ} \sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

504 $\frac{4na^2}{\sin \frac{\pi}{n}} \sin \alpha \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right)$.

505 $nh^2 \operatorname{ctg} \varphi \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi \cos^2 \frac{\pi}{n}}$.

506. $2 \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha\right)$.

507. $2 \arcsin \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$

508 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}$.

509. $4\pi Q$.

510. $\frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$.

511 $\frac{\pi a^3}{12} (2 - \cos 2\varphi) \sin \varphi$.

512. $\frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}$. Указание. Провести плоскость через высоту конуса и вершину основания тетраэдра. Затем воспользоваться подобием образовавшихся при этом прямоугольных треугольников

513. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Указание. Пусть C — основание перпендикуляра BC, опущенного из середины B ребра AD на диагональ AK данного куба. Так как BA — биссектриса $\angle OBC$, то OB, AB, BC лежат в одной плоскости, а именно, в диагональной плоскости ADK куба, причем O лежит на продолжении диагонали AK. Проведем $DE \perp AK$, где E — точка на AK. Тогда из треугольников ADK, ABC и OBC найдем $AC = \frac{1}{2}AE = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $BC = \frac{a}{\sqrt{6}}$, $OA = OC - CA = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{6}} - \frac{a}{2\sqrt{3}}$, где r — искомый радиус. Теперь остается воспользоваться теоремой о свойстве биссектрисы внутреннего угла $\triangle OBC$.

514. $\sqrt{3}r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{6}\operatorname{tg}\alpha$

515. $2\sqrt{3}R\sin\alpha$; $4R\sqrt{\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}$

516 $8\sqrt{3}r^3 \cdot \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{3}{2}\alpha}$ Указание. Пусть $MABC$ — данная пирамида с основанием ABC, MO — ее высота, O_1 — центр вписанного в пирамиду шара, K — точка касания шара с гранью MAB пирамиды. Проведем плоскость через ребро MC пирамиды и ее апофему MD и положим $AB = 2x$. Тогда найдем, что $MD = x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $h = MO = \frac{x}{\sqrt{3}}\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}$. Так как $\triangle MOD \sim \triangle MO_1K$, то из пропорции $MD : DO = MO_1 : O_1K$ получим $x = \frac{\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1\right)r\sqrt{3}}{\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}$, а затем найдем и искомый объем $V = \frac{x^2h}{\sqrt{3}}$.

517. $2\operatorname{arctg}\frac{(\pi-3)\sqrt{3}}{\pi+3}$. Указание. Пользуясь решением задачи 516 и принятыми там обозначениями, получим $\frac{4\pi r^2}{x^2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ или $x = r\sqrt{\pi}$ (*), где $x = \frac{\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1\right)r\sqrt{3}}{\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}$. Подстановка этого значения x в равенство (*) приведет нас к уравнению $(\pi+3)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 6\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 3(\pi-3) = 0$.

518. $\frac{\sqrt{3}}{2}(h-2r)h^2$. Решение. Пусть M — точка пересечения высот SE и AD боковой грани SAB данной пирамиды, $SO_1 = h$ — ее высота. Центр шара, о котором говорится в задаче, очевидно, находится на высоте пирамиды, и шар, кроме точки S, имеет еще одну общую точку с высотой

Обозначим ее буквой K. Так как $\triangle SMK \sim \triangle SO_1E$ (прямоугольные с общим углом MSK), то $SM : SK = SO_1 : SE$ и $SM \cdot SE = SK \cdot SO_1 = 2rh$ (*) С другой стороны, $\triangle SMD \sim \triangle SBE$ (прямоугольные, имеющие общий $\angle MSD$), так что $SM \cdot SD = SB : SE$ и $SM \cdot SE = SB \cdot SD$. Если же учесть равенство (*), то получим $SB \cdot SD = 2rh$ (**) Но из $\triangle ASB$ на основании теоремы о квадрате стороны треугольника, лежащей против острого угла, найдем, что $SB \cdot SD = \frac{1}{2}(2SB^2 - AB^2)$ Последнее же, если положить $AB = x$ и подсчитать (из $\triangle SO_1B$) значение $SB^2 = h^2 + \frac{x^2}{3}$, примет такой вид $SB \cdot CD = h^2 - \frac{x^2}{6}$ Подставив найденное значение $SB \cdot CD$ в равенство (**), получим уравнение $h^2 - \frac{x^2}{6} = 2rh$ Отсюда $x^2 = 6h(h - 2r)$, $V = \frac{x^2\sqrt{3}}{12}h = \frac{\sqrt{3}}{2}(h - 2r)h^2$

519. $R\sqrt{6}$ Указание Провести плоскость через центр шара, точку касания его с плоскостью P и вершину тетраэдра, противолежащую той его грани, которой касается шар, а затем эти три точки попарно соединить отрезками прямых В сечении данной фигуры этой плоскостью найдутся два подобных треугольника, рассмотрев которые найдем искомую величину

520—523. Указание Пусть шаровая поверхность касается боковых граней SAB, SBC, SCA треугольной пирамиды в точках соответственно M, N, P (четвертой грани она, вообще говоря, не касается) Так как отрезки касательных прямых, проведенных к шаровой поверхности из одной и той же точки, равны между собой, то $\triangle SMB = \triangle SNB$, потому что у этих треугольников $SM = SN$, $BM = BN$ и сторона SB общая Отсюда следует, что $\angle MSB = \angle NSB$ и $\angle MBS = \angle NBS$ Точно так же устанавливаются равенства $\angle PSA = \angle MSA$ и $\angle PAS = \angle MAS$. Заметим еще, что если данная пирамида правильная, то центр рассматриваемой шаровой поверхности находится на высоте этой пирамиды или на продолжении высоты.

520. $\frac{2r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{6}}{\cos\frac{\alpha}{3}}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{6}\right)}$ Указание Пусть высоты BD и SE боковой грани SAB данной пирамиды пересекаются в точке M, а высоты BK и SF ее боковой грани SBC — в точке N. Прямоугольные треугольники SBE и SBF равны, так как у них $\angle MSB = \angle NSB$ (см указание к задачам 520—523) и общая гипотенуза SB. Поэтому $\angle SBA = \angle SBC$ Аналогично доказывается, что $\triangle SBD = \triangle SBK$ и, следовательно, $\angle BSA = \angle BSC$ Но тогда $\triangle SAB = \triangle SBC$ (второй признак равенства треугольников), а в таком случае $SA = SC$ и $AB = BC$ Если рассмотреть грани SAB и SAC, то аналогично можно доказать, что $SB = SC$ и $AB = AC$. Таким образом, установлено, что у пирамиды боковые ребра равны, а основанием служит равносторонний треугольник. Но это значит, что пирамида правильная с плоским углом при вершине, равным $\frac{\alpha}{3}$ Для определения бокового ребра $l = SB$ пирамиды обратимся к треугольнику SBM В нем $\angle SBM = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{3}$, $\angle SMB = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{6}$. Поэтому, положив $SM = x$, получим на основании теоремы синусов, что $l = \frac{x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{3}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{6}\right)$ или $l = \frac{x}{\cos\frac{\alpha}{3}}\cos\frac{\alpha}{6}$ (*). Чтобы найти x, проведем высоту SO_1 пирамиды, и пусть центр сферы находится в точке O. Так как прямоугольные треугольники SOM и SO_1E, как имеющие

общий угол O_1SE, подобны, то $\frac{SO}{OM}=\frac{SE}{EO_1}$ или $\frac{SO}{r}=\frac{EB\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{6}}{EB\operatorname{tg}30^\circ}$, так что $SO=r\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{6}$. Но тогда $x=\sqrt{SO^2-OM^2}=r\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{6}-1}=$ $=\frac{2r}{\sin\frac{\alpha}{6}}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{6}\right)}$ Подставляя это значение x в равенство (*), получим приведенный выше ответ

521. $\sqrt[6]{\frac{9V^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}}$. Указание. Пусть биссектрисы BD и SE боковой грани SAB данной пирамиды пересекаются в точке M, а биссектрисы BK и SF ее боковой граии SBC — в точке N. Так как $\angle MSB=\angle NSB$ и $\angle MBS=\angle NBS$ (см указание к задачам 520—523), то $\angle ASB=\angle BSC$ и $\angle ABS=\angle CBS$. Следовательно, $\triangle SAB=$ $=\triangle SBC$ (второй признак равенства треугольников) Но в таком случае $SA=SC$ и $AB=BC$. Если рассмотреть грани SAB и SAC, то аиалогично докажем, что $SB=SC$ и $AB=AC$ Таким образом установлено, что у пирамиды боковые ребра равны, а основанием служит равносторонний треугольник, т е эта пирамида правильиая

Обозначим ребро основания буквой x, а высоту SO пирамиды буквой y. По условию $\frac{x^2\sqrt{3}}{12}y=V$ (*) Из равнобедреиного $\triangle SEF$, где $EF=\frac{1}{2}x$, находим $SF=\frac{x}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$. Так как $OF=\frac{x\sqrt{3}}{6}$, то из прямоугольиого $\triangle SOF$ получаем $y=\sqrt{SF^2-OF^2}=\frac{x}{4\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. Если это зиачение y подставить в равенство (*), то из иего легко найдем x, а затем и периметр основания $3x$

522. $\frac{h\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right)}{4\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{6}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{6}\right)}$. Решение Пусть медианы BD и SE боковой грани SAB даниой пирамиды пересекаются в точке M, а медианы BK и CF ее боковой грани SBC — в точке N. Так как у треугольников SBE и SBF стороиа SB общая, $\angle MSB=\angle NSB$ (см. указаиие к задачам 520—523) и $SM=SN$, то, переписав последиее в виде $\frac{2}{3}SE=$ $=\frac{2}{3}SF$, убеждаемся в справедливости равеиства $SE=SF$, а тем самым и равеиства $\triangle SBE=\triangle SBF$ Из равенства этих треугольников следует, что $BE=BF$, т. е $\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}BC$ или $AB=BC$. Если рассмотреть треугольиики BSD и BSK, то аиалогичио докажем, что $SA=SC$. Таким же способом, рассмотрев граии SAB и SAC, докажем равенства $AB=AC$ и $SB=SC$ Таким образом, установлено, что боковые ребра пирамиды равны,

а основанием служит равностороннний треугольник Это значит, что данная пирамида правильная с плоским углом при вершине основания, равным $\frac{\alpha-\pi}{6}$. Чтобы найти радиус шара $r=OM$, положим $AB=x$ и обратимся к подобным треугольникам SMO и SEO_1, где O — центр шара и O_1 — основание высоты $SO_1=h$ Так как $BE=\frac{1}{2}x$, $O_1E=\frac{x\sqrt{3}}{6}$, $SM=\frac{2}{3}SE=\frac{2}{3}\times$ $\times\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{6}=\frac{1}{3}x\operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{6}$, то из пропорции $OM\ O_1E=SM:SO_1$ получим $r=\frac{x^2}{6\sqrt{3}h}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{6}$ (*) Величину x найдем из $\triangle SO_1E$. Имеем $SE^2=EO_1^2+SO_1^2$ или $\left(\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\pi}{6}\right)^2=\left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2+h^2$, $x^2\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\pi}{6}-\right.$ $\left.-\frac{1}{3}\right)=4h^2$, $x^2\sin\left(\frac{\alpha-\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=3h^2\cos^2\frac{\alpha-\pi}{6}$ Остается из последнего равенства найти x^2 и подставить в равенство (*).

523. $\dfrac{b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\sqrt{\sin\frac{\pi+\alpha}{3}\sin\frac{\pi-\alpha}{3}}}$. Указание. Пусть M и N — центры окружностей, описанных вокруг боковых граней SAB и SBC данной пирамиды Так как $SM=SN$ (см указание к задачам 520—523), то, следовательно, радиусы этих окружностей равны Но тогда $\angle SAB=\angle SBC$, что следует из теоремы синусов (ни один из этих углов не является тупым) Учитывая еще условие $\angle ASB=\angle ABS=\alpha$, заключаем, что $\triangle SAB=$ $=\triangle SBC$, а поэтому $SA=SC$ и $AB=BC$ Аналогично доказываются равенства $SB=SC$ и $AB=AC$, так что у данной пирамиды боковые ребра равны, а в основании лежит равносторонний треугольник. Таким образом, пирамида правильная и ее боковое ребро равно b Искомый радиус легко найти из подобия треугольников SMO и SO_1E, где O — центр шара, а SO_1 и SE — высота и апофема пирамиды, вычислив предварительно высоту SO_1 и учтя равенство $SM=\dfrac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

524. $\dfrac{4r}{\sqrt{3}}$. Решение Соединим центр O шара с вершиной D пирамиды и точками M, N, P касания шара с боковыми ребрами AD, BD, CD этой пирамиды Из равенства прямоугольных треугольников OMD, OND, OPD следует равенство углов, которые образует высота пирамиды с боковыми ребрами Но тогда прямоугольные треугольники O_1AD, O_1BD, O_1CD, где O_1 — основание высоты O_1D данной пирамиды, также равны, откуда следует равенство боковых ребер пирамиды Пусть E, F, K — точки касания ребер AB, BC, CA с рассматриваемым шаром Обратимся теперь к боковой грани ADB пирамиды. Так как $AD=DB$ и $DM=DN$, то отсюда следует, что $AM=NB$ С другой стороны, $BE=BN=BF$, как отрезки касательных, проведенных к шаровой поверхности из одной и той же точки B Точно также $AE=AM=$ $=AK$ и $CK=CP=CF$. Отсюда заключаем, что $AE=EB=BF=FC=$ $=CK=KA$, т. е. что $\triangle ABC$ правильный, а потому и данная пирамида правильная Обратимся теперь к правильной пирамиде $DMNP$. Очевидно, ее высота DO_2 лежит на высоте DO_1 данной пирамиды. Так как $MD=$ $=\sqrt{OD^2-OM^2}=r\sqrt{2}$, то из подобных треугольников MOD и MO_2D легко найдем отрезок $MO_2=r\sqrt{\frac{2}{3}}$, а тогда $MN=MO_2\sqrt{3}=r\sqrt{2}$. Итак,

оказывается, что $MN = ND$ Это значит, что и $AD = AB$, т. е. данная пирамида есть правильный тетраэдр. Теперь уже легко найти высоту пирамиды Она в два раза больше длины отрезка $DO_2 = \sqrt{MD^2 - MO_2^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} r$

525. $\frac{1}{12a}\sqrt{16S^2 + 9a^4}$ Решение. Пусть M и N — середины боковых ребер DA и DB данной пирамиды, а E и F — середины ребер AB и BC ее основания Так как отрезки касательных, проведенных к шаровой поверхности из одной и той же точки, равны, то $BE = BF$, $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC$, $AB = BC$ Аналогично доказывается, что $AB = AC$ Но в таком случае $\triangle ABC$ равносторонний Докажем равенство боковых ребер пирамиды Соединим центр O шара с точками A, B, M, N, а точки M и N еще с серединой K отрезка DO Легко доказать, что $AO = OB$. Но тогда $MK = NK$, так как $AO = 2MK$, а $OB = 2NK$ Теперь видно, что $\triangle OMK = \triangle ONK$ (третий признак равенства треугольников), а поэтому $\angle MKD = \angle NKD$ и $\triangle MKD = \triangle NKD$ (второй признак равенства треугольников) Из последнего равенства следует, что $DM = DN$ или $\frac{1}{2} DA = \frac{1}{2} DB$, т е $DA = DB$ Аналогично можно доказать, что $DA = DC$ Итак, данная пирамида правильная, причем сторона ее основания равна a, а площадь боковой грани $\frac{1}{3} S$.

Чтобы найти искомый радиус r, обратимся к прямоугольному треугольнику FOO_1, где O_1 — основание высоты DO_1 Из него найдем, что $r = \sqrt{O_1F^2 + OO_1^2}$ (*) Но $O_1F = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и, таким образом, остается найти только O_1O С этой целью проведем в плоскости AMF прямые $ML \perp AF$ и $OT \perp ML$, где L лежит на AF, а T — на ML, и рассмотрим треугольники O_1FO и TOM Они равны, как прямоугольные, причем $OF = OM = r$ и $O_1F = OT = \frac{1}{3} AF$ Поэтому $OO_1 = MT = \frac{1}{2} ML = \frac{1}{4} DO_1$ Но $DO_1^2 = DF^2 - O_1F^2 = \left(\frac{2S}{3a}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$ и $OO_1^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{4S^2}{9a^2} - \frac{a^2}{12}\right)$ Остается подставить найденное значение OO_1^2 в равенство (*)

526 $\frac{1}{3} S\left(R \pm \sqrt{R^2 - r^2}\right)$, где S — площадь основания пирамиды, $r = \frac{abc}{4S}$ Указание Для отыскания высоты пирамиды следует провести плоскость через высоту и боковое ребро пирамиды

527. $\frac{1}{2} l \sin\varphi \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Указание Провести плоскость через высоту пирамиды и середину основания трапеции. В сечении получится равнобедренный треугольник и искомый радиус будет радиусом окружности, вписанной в этот треугольник.

528. $\frac{l}{2\sin\varphi}$.

529. $\sqrt[3]{\frac{2V}{3\sin 40^\circ}} \operatorname{tg}\varphi$.

530. $\frac{b}{2} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\alpha}{2}\right)}}$

531. 27 : 1. Указание Центры шаров совпадают и находятся в точке пересечения высот тетраэдра Эта точка делит высоту в отношении 3 · 1, что и дает отношение радиусов шаров Отношение же объемов шаров равно отношению кубов их радиусов

532. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$ Указание Рассмотреть сечения пирамиды, проведенные 1) через два противоположных боковых ребра, 2) через апофемы двух противоположных граней Радиусы шаров выразить через сторону основания и искомый угол

533. $2a^2(8+\pi)$ Указание Часть боковой грани призмы, заключенная внутри шара, состоит из квадрата и кругового сегмента с дугою 90° В этом можно убедиться, если провести плоскость через два противоположных боковых ребра призмы и воспользоваться теоремой произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

534. $0{,}5l\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$.

535. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{m}{n}}$.

536. $\arccos\frac{2n-1\pm2\sqrt{n^2-2n}}{4n+1}$, при этом $n\geqslant 2$.

537. $\frac{\pi R^3}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\left(\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

538. $2\sin^4\alpha\cos^2\alpha$.

539 $4\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\left(1+\operatorname{tg}^6\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{ctg}\varphi$.

540. $\frac{1}{3}\pi(1+2\sqrt{2})^3R^3$. Указание Если соединить попарно центры всех пяти шаров, то получится четырехугольная пирамида, у которой длина каждого ребра равна $2R$, а диагональ основания $2R\sqrt{2}$ Проведем диагональное сечение этой пирамиды В сечении получится равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $2R\sqrt{2}$ Его стороны параллельны сторонам того треугольника, который получится в сечении проведенной плоскости с боковой поверхностью конуса Длина гипотенузы этого последнего треугольника равна $2R\operatorname{ctg}\frac{45^\circ}{2}+2R\sqrt{2}=2R\left(\frac{1+\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}+\sqrt{2}\right)=$ $=2R(2\sqrt{2}+1)$

541. $\frac{1}{\sin\varphi\sin 2\varphi}-1$.

542. $\arccos\frac{1}{3}$.

543. $\frac{1}{2}l\sin^2\alpha$.

544. $\frac{4r\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin 2\varphi}$.

545. $\frac{61}{6912}V$ Указание. Многогранник, объем которого требуется найти, есть правильная усеченная треугольная пирамида. Верхнее основание пирамиды лежит в верхнем основании цилиндра, а нижнее равно треугольнику, вписанному в верхнее основание цилиндра Следует также иметь в виду, что точка пересечения высот тетраэдра делит каждую его высоту в отношении 1 : 3.

546. 3, 4, 5, 6. Указание. Ввести в рассмотрение первый член прогрессии x и ее разность d.

547. 5, 15, 45, ..

548. 2, 6, 18, 30 и 32, 16, 8, 0.

549. 2, 10, 18, ...; 2, 6, 18, ...

550. $\log_2 5$.

551. $b^3 = a^3c$.

552. $x = 7$.

553. $x = 8$

554. $n = 6$

555. Указание. Так как $k^2 = k(k-1) + k = 2C_k^2 + k$, то $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + 2(C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_n^2)$.

556. Указание. Так как $kC_n^k = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}$, то левая часть доказываемого равенства примет вид $\left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n\right) + n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}\right)$

557. Указание. Так как $C_{n+1}^m = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} = \frac{n!(n+1)}{m!(n+1-m)!} = \frac{n![(n+1-m)+m]}{m!(n+1-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n+1-m)!} = C_n^m + C_n^{m-1}$, то левая часть доказываемого равенства примет вид $\left(C_n^0 + 0\right) - \left(C_n^1 + C_n^0\right) + \left(C_n^2 + C_n^1\right) - \ldots + (-1)^k\left(C_n^k + C_n^{k-1}\right)$

558 2739.

559 72

560. $x = 2$, $y = 3$, $n = 5$.

561. Указание. Положим $x - 1 = y$. Подставив в данный многочлен $x = 1 + y$, получим $(1+y)^{2n} - n(1+y)^{n+1} + n(1+y)^{n-1} - 1$. Если теперь, пользуясь формулой бинома Ньютона, раскрыть скобки и привести подобные, то придем к многочлену вида $Ay^3 + By^4 + \ldots + y^{2n}$, который делится на y^3. А это значит, что данный многочлен делится на $(x-1)^3$.

562. Указание. $(3+1)^n - 1 + 15n = 3^n + C_n^1 3^{n-1} + \ldots + C_n^2 3^2 + 3n + 15n = 9A + 18n$

563. Указание. $27(8+1)^n - 27 + 40n = 27(8^n + C_n^1 8^{n-1} + \ldots + C_n^2 \times 8^2 + 8n + 1) - 27 + 40n = 8^2A + 27 \cdot 8n + 40n = 64A + 4 \cdot 64n$.

564. Указание. Пусть общий остаток от деления a и b на m есть r, причем $0 \leqslant r < m$. Тогда числа $a - r$ и $b - r$ делятся на m без остатка. Имеем $a^k = [(a-r) + r]^k = A(a-r) + r^k$ и аналогично $b^k = B(a-r) + r^k$, где A и B — целые числа. Отсюда и следует утверждение.

565. 494. Решение. Среди чисел 1, 2, 3, .., 500 есть ровно $\frac{500}{2} = 250$ четных чисел. Это числа 2, 4, 6, . , 500. Среди чисел 2, 4, 6, ... , 500 есть ровно $\frac{250}{2} = \frac{500}{2^2} = 125$ чисел, делящихся на 4. Это числа 4, 8, 12, ... , 500. Среди чисел 4, 8, ... , 500 есть $\left[\frac{125}{2}\right] = \left[\frac{500}{2^3}\right] = 62$ числа, делящихся на 8. При этом символом $[N]$ обозначается наибольшее целое число, содержащееся в N. Поэтому искомое число равно $\left[\frac{500}{2}\right] + \left[\frac{500}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{500}{2^8}\right] = 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 494$

566 Если $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$, то $\psi = \arg(z^2 - z) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2} + 2k\pi$. Если $\sin\frac{\varphi}{2} < 0$, то $\psi = \frac{3\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2} + 2k\pi$. Если $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, то ψ — любое число.

Решение. Если $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, то $\varphi = 2n\pi$, $z = 1$ и $z^2 - z = 0$. В этом случае аргумент неопределенный. Пусть $\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0$. Так как $z^2 - z = (\cos 2\varphi - \cos\varphi) + i(\sin 2\varphi - \sin\varphi)$, то модуль $r = |z^2 - z| = \sqrt{(\cos 2\varphi - \cos\varphi)^2 + (\sin 2\varphi - \sin\varphi)^2} = \sqrt{2 - 2\cos\varphi} = \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$. Поэтому $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{\sin\psi}{1+\cos\psi} = \frac{r\sin\psi}{r + r\cos\psi} = \frac{\sin 2\varphi - \sin\varphi}{2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| + \cos 2\varphi - \cos\varphi} = \frac{2\cos\frac{3}{2}\varphi \sin\frac{\varphi}{2}}{2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| - 2\sin\frac{3}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2}}$. Если $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$, то $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{\cos\frac{3}{2}\varphi}{1 - \sin\frac{3}{2}\varphi} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\varphi\right)$ и $\frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\varphi + k\pi$. При $\sin\frac{\varphi}{2} < 0$ получим $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{\cos\frac{3}{2}\varphi}{-\left(1 + \sin\frac{3}{2}\varphi\right)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{2}\varphi\right)$, откуда $\frac{\psi}{2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{4}\varphi + k\pi$.

567. Решение. Пусть $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$. Так как $z\bar{z} = 1$, то $\frac{z}{1} = \frac{1}{\bar{z}}$, $\frac{z+1}{1+\bar{z}} = z$, $z = \frac{a+1+bi}{a+1-bi}$. Но $a + 1 \neq 0$ и поэтому, положив $x = \frac{b}{a+1}$, получим

$$z = \frac{1 + xi}{1 - xi} \quad (*).$$

Число $z = -1$ не может быть представлено в форме (*), так как уравнение $\frac{1+xi}{1-xi} = -1$ не имеет решений.

Можно доказать и так: $z = \cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + i\frac{2x}{1+x^2} = \frac{(1+xi)^2}{1+x^2} = \frac{1+xi}{1-xi}$, где $x = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ и $\varphi \neq (2k+1)\pi$.

568. Решение. $|z| = \frac{|1+xi|}{|1-xi|} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$.

569. Указание. Так как $z\bar{z} = 1$, где z и $\bar{z}$ — сопряженные числа, то, обозначив данное выражение буквой α и подставив в него $z = \frac{1}{\bar{z}}$, получим

$a = -\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = -\bar{a}$ или $a + bi = -(a - bi)$ Можно поступить и так: положив в данном выражении $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, получим после простых преобразований, что $a = i\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\varphi}{2}$, причем $\varphi \neq k\pi$

570. Указание. Положив $\dfrac{z-1}{z+1} = bi$, найдем $z = \dfrac{1+bi}{1-bi}$. Далее следует поступать так, как в задаче 568.

571. Указание. Если числам z_1, z_2, z_3 соответствуют точки M_1, M_2, M_3 плоскости, то, положив $z_1 = a + bi$, $z_2 = m + ni$, найдем, что $M_1M_2^2 = (a-m)^2 + (b-n)^2 = (a^2+b^2) + (m^2+n^2) - 2am - 2bn = 2(a^2+b^2) + 2(m^2+n^2) - [(a+m)^2 + (b+n)^2] = 4 - |z_1 + z_2|^2 = 4 - |z_3|^2 = 3$ Итак, $M_1M_2 = \sqrt{3}$. Аналогично можно показать, что $M_2M_3 = M_3M_1 = \sqrt{3}$.

572 Указание. Обозначим данную дробь буквой a Так как $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$, где z и $\bar{z}$ — сопряженные числа, то $a = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2} = \dfrac{\dfrac{1}{\bar{z}_1} + \dfrac{1}{\bar{z}_2}}{1 + \dfrac{1}{\bar{z}_1\bar{z}_2}} = \dfrac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{1 + \bar{z}_1\bar{z}_2} = \bar{a}$ или $a + bi = a - bi$

Шахно Константин Устинович

КАК ГОТОВИТЬСЯ К ПРИЕМНЫМ ЭКЗАМЕНАМ В ВУЗ ПО МАТЕМАТИКЕ

Редакторы *Т К Майборода, Н М Веревкина*
Худож редактор *В Н. Валентович*
Техн. редактор *М Н. Кислякова*
Корректор *С Н. Надежкина*

Подп к печати с матриц 9/I 1973 г. Бумага 60×90¹/₁₆ типогр № 2. Печ. л 24,5 Уч.-изд л. 29,52 Изд. № 67—66 Тип зак. 32. Тираж 300 000 (1 й завод 1—150 000) экз Цена в переплете № 5 — 96 коп, в переплете № 7 — 1 р.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Редакция физико-математической литературы Минск, ул. Кирова, 24

Полиграфический комбинат им Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Минск, ул. Красная, 23.

Учебная литература
ИЗДАТЕЛЬСТВА «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА» ПО МАТЕМАТИКЕ
ИЗДАНА В 1971—1972 гг.

Аналитическая геометрия на плоскости. Под ред. Н. В Пюповой. 40 коп.

Гусак А А. **Задачи и упражнения по высшей математике.** Ч. 1. 68 коп

Крылов В. И. и др. **Вычислительные методы высшей математики.** Т. 1. 1 р 47 к

Метельский Н. В **Математика.** Курс средней школы для поступающих в вузы и техникумы. 1 р. 15 к.

Неменман М Е и др. **Программирование на АКИ.** 69 коп.

Полунин И Ф **Математическое программирование в землеустройстве.** 70 коп.

Ривкинд Я. И. **Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах.** 40 коп.

Столяр А. А. **Логическое введение в математику.** 38 коп.